

# А.С. НИУЛ

# ТЕНЗОРНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

- генеральное неравенство средних величин
- глобальный предельный метод вычисления корней алгебраического (векового) уравнения
- минимальный аннулирующий многочлен матрицы
- квазиевклидова и псевдоевклидова тензорная тригонометрия в трех основных формах
- проективные и моторные тензорные углы и функции
- сферические и гиперболические тензоры движений
- тензор ортосферической ротации
- сферические и гиперболические рефлекторы
- сферические и гиперболические тензоры деформаций
- тригонометрический спектр нуль-простой матрицы
- генеральные косинусное и синусное неравенства
- общие и генеральные квадратичные нормы матриц
- тензоры элементарных ротаций и деформаций
- полярное представление общих тензоров движения
- тригонометрические проективные модели геометрий
- гиперболическое уравнение трактисы
- теорема об ортопредставлении суммы двух движений
- общие законы суммирования движений (скоростей)
- формулы для ортосферической ротации (буста)
- тригонометрические модели релятивистской кинематики и динамики, в том числе в поле тяготения
- четырехмерный псевдоаналог теории Френе - Серре



**А.С. Нинул**

**ТЕНЗОРНАЯ  
ТРИГОНОМЕТРИЯ**

**Теория и приложения**



Москва «Мир» 2004

УДК 512.64/514.1/530.12  
ББК 22.143  
Н 60

Нинул А.С.

Н 60 Тензорная тригонометрия. *Теория и приложения*. – М.: Мир, 2004, 336с., ил.  
ISBN 5-03-003717-9

В монографии изложены основы тензорной тригонометрии, базирующейся на квадратичных метриках в многомерных арифметических пространствах. В теоретическом плане тензорная тригонометрия естественным образом дополняет классические разделы аналитической геометрии и линейной алгебры. В практическом плане она даёт инструментарий для решения разнообразных геометрических задач в многомерных аффинных, евклидовых и псевдоевклидовых пространствах. Движения, определяемые тензорной тригонометрией, задают геометрию в малом для вложенных в них подпространств постоянной кривизны.

Кроме того, тензорная ротационная и деформационная тригонометрия в элементарной форме применена к изучению движений в неевклидовых геометриях – сферической и гиперболической, а также в теории относительности. В результате получены наиболее общие – матричные, векторные и скалярные представления этих движений в весьма наглядной тригонометрической форме. Новые методы тензорной тригонометрии предназначены для применения в ряде областей математики и математической физики.

Для специалистов в областях многомерных геометрий арифметических пространств, аналитической геометрии, линейной алгебры, неевклидовых геометрий и теории относительности; для преподавателей, аспирантов и студентов физико-математических специальностей.

УДК 512.64/514.1/530.12  
ББК 22.143

*Редакция литературы по математическим наукам*

ISBN 5-03-003717-9

© Нинул А.С., 2004

*Настоящее издание посвящается  
100-летию первых публикаций по теории относительности  
и 175-летию первых публикаций по неевклидовой геометрии*

## К читателям

Пожалуй, редко какой раздел математической науки так хорошо известен и понятен всем ещё со школьных времён как тригонометрия. Зародившись в глубокой древности, она практически завершила своё развитие и приобрела современную форму в конце XVIII века в трудах великого Леонарда Эйлера. Между тем геометрия от исторически изначальных евклидовых форм за прошедшие два века шагнула далеко вперёд. В том числе были открыты и изучены её разнообразные неевклидовы и многомерные тензорные формы.

В данной книге предпринято построение общих тензорных форм тригонометрии в многомерных арифметических пространствах с квадратичной метрикой – как евклидовой, так и псевдоевклидовой. В частности, в этих формах классическая скалярная тригонометрия проявляется на собственных плоскостях или псевдоплоскостях тригонометрического подпространства тензорного угла.

Чтобы прийти к намеченной цели, необходимо было основательно разобраться в ряде смежных вопросов, относящихся к теории точных матриц – составной части линейной алгебры. Затраченные усилия были вознаграждены получением, на наш взгляд, ряда интересных и неожиданных результатов в алгебре и геометрии.

С точки зрения тензорной тригонометрии некоторые довольно сложные и трудно воспринимаемые математические и физические теории видятся совершенно прозрачно и естественным образом. Здесь это показано на примере тригонометрического моделирования движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности.

Тензорная тригонометрия находится на стыке проблем, изучаемых многомерной аналитической геометрией и линейной алгеброй. Ввиду того что изложение новой теории потребовало применения дополнительных обозначений и терминологии, автор стремился придать им наиболее удобную и логичную форму.

Автор будет весьма признателен всем тем, кто выскажет свои отзывы, замечания или какие-либо полезные предложения по данной книге на интернет-сайте: «<http://www.ninulas.narod.ru/>».

**A. S. Ninul, Tensor Trigonometry.** The theory and applications.

**Appendix. Trigonometric motion models in non-Euklidean geometries  
and in the Theory of Relativity.**

Publishing House «Mir», Moscow 2004.

## **Resume**

The main purpose of given monograph is to develop a number of geometric notions of the Theory of Exact Matrices and then to elaborate main statements of Tensor Trigonometry, including trigonometry of bivalent tensor angles, formed by linear subspaces or in accordance with their rotation.

In first part (chapters 1–4) a number of questions of the Theory of Exact Matrices is considered. The general inequality for average values is formulated, moreover hierarchical invariants for spectrally positive matrix are installed. Eigen projectors and quasiinverse matrices are denominated in the evident form – through coefficients of characteristic polynomials. A minimal annihilating polynomial is identified. The parameters of singularity of matrices and inequalities, connected with them, are studied. Null-simple and null-normal singular matrices are determined.

In second part (chapters 5–12) Tensor Trigonometry in affine and metric forms is developed. The binary angular and modulus characteristics for linear objects are determined. Quasi-Euklidean and pseudo-Euklidean Tensor Trigonometries in three kinds: projective, reflective and motor – are constructed (last term means rotation and deformation). The complete trigonometric spectrum of null-simple matrix is installed, on the base of which the general sine and cosine norming inequalities are received. The quadratic norms of matrices are determined.

In Appendix Tensor Trigonometry in elementary forms is used for studying motions in non-Euklidean geometries and in the Theory of Relativity. To add two- and poly- step motions (velocities) the polar presentation of trigonometric rotations is used. The law of adding motions (velocities) is given in the general matrix form. A hyperbolic formalization of Einstain dilation of time and Lorentz contraction of extent is realized as effects of rotary and deformational transformations of coordinates. The formulas of calculation and trigonometric interpretation of orthospherical rotation (boost) are given. Trigonometric models of kinematic and dynamic of material point in spacetime by Minkowski are proposed. Four absolute vector and scalar differential-geometric and physical features of curved world line, completely defining its configuration in the vicinity of each own world point, are considered, including motions in the gravitational field.

The edition is dedicates to 100 years anniversary of first publications on the Theory of Relativity, to 175 years anniversary of first publications on the non-Euklidean geometry and their great creators.

*“В симфонию эту я вложил,  
без преувеличения, всю свою душу...”*

П. И. Чайковский

## Предисловие

В теории матриц такие классические понятия, как сингулярная матрица и её ранг, собственные подпространства, аннулирующие многочлены, проекторы и т. д., имеют смысл лишь для точных матриц и при точных вычислениях. Различают точную теорию понятий и аппромаксимационную теорию оценок понятий [18]. Каждая из них играет свою роль. Очевидно, что понятия, связанные с точными числовыми характеристиками, относятся к точной теории. Эта теория используется не только для построения и анализа абстракций, но она важна и для анализа объектов прикладных задач. Ведь числовые характеристики объектов всегда точны, а приближённы лишь их разнобразные оценки.

В основной части монографии в двенадцати главах содержатся как результаты исследований по теории точных матриц (раздел I), так и развитая на этой платформе тензорная тригонометрия (раздел II). Последняя, сама по себе, является составной частью соответствующей геометрии с квадратичным метрическим инвариантом в многомерном арифметическом пространстве.

Исторические корни классической скалярной тригонометрии, как составной части двумерной геометрии, уходят в далёкое прошлое. Некоторые тригонометрические формулировки содержались ещё в “Началах” Евклида. Интересно, что сферическая тригонометрия стала математически развиваться раньше тригонометрии на плоскости. Это было обусловлено потребностью в ней со стороны практической астрономии. Сферические функции встречались уже в IX – X веках у арабских математиков. В европейскую науку тригонометрию ввёл в начале XIV века Р. Уоллингфорд, применив её, в частности, к решению прямоугольного треугольника. Гиперболические функции открыл А. Муавр, а реально их начали применять в геометрических исследованиях И. Ламберт и Ф. Тауринус. Современный завершённый вид скалярная тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера, который также осуществил её комплексификацию. С другой стороны, геометрия вообще продолжала развиваться далее и особенно бурно в связи с появившейся идеей многомерного геометрического пространства.

Многомерная геометрия в истории развития математики возникла впервые, по-видимому, в середине XIX века в классическом труде Г. Грассмана “Учение о линейном протяжении” (1844г.) [54]. Им же и независимо от него У. Гамильтоном были заложены основы векторного анализа в многомерных арифметических пространствах. Выдающийся вклад в обоснование алгебраического подхода к геометрии объектов арифметического пространства внесла знаменитая аксиома Кантора–Дедекинда о континууме.

Возникновение примерно в то же время и последующее развитие линейной алгебры в трудах Фробениуса, Крамера, Кронекера, Капелли, Сильвестра, Жордана, Эрмита, Вейля и других математиков приводило со временем к всё большему её наполнению геометрическим содержанием. Она нашла эффективное применение в теории векторных евклидовых, а после известных работ А. Пуанкаре и Г. Минковского и псевдоевклидовых пространств. Этому весьма способствовало алгебраическое определение понятий, связанных с метрическими свойствами арифметических пространств (длин векторов и значений углов между ними). Как известно, базисными для определения мер и норм евклидова пространства явились косинусное неравенство Коши и синусное неравенство Адамара. Впоследствии Э. Мур и Р. Пенроуз предложили общие методы квазиобращения матриц. А. Н. Тихонов дал предельный метод нормального решения систем линейных уравнений. Результаты этих исследований имели также большое геометрическое значение и в какой-то мере явились отправной точкой данной работы.

Главная цель настоящей монографии заключается в разработке и применении тригонометрических понятий многомерной геометрии. В качестве основной теоретической платформы используется и развивается далее теория точных матриц. При этом показаны дополнительные возможности в использовании получаемых результатов.

Прежде всего, найдена структура матричных характеристических коэффициентов 1-го и 2-го рода, широко фигурирующих в теории точных матриц с середины XX века (и возникшие в работах Ж.-М. Сурье и Д. К. Фаддеева), – в дополнение к известной со времён У. Леверье структуре скалярных характеристических коэффициентов. Идентифицирован минимальный аннулирующий многочлен матрицы исходя из полученного в работе фундаментального соотношения для её основных параметров сингularityности. Установлен тригонометрический спектр нуль-простой матрицы, на основе которого получены генеральные нормирующие косинусное и синусное неравенства.

Введены общие квадратичные нормы для особых линейных геометрических объектов – линеоров, задаваемых  $n \times m$ -матрицами  $A$ , где  $1 \leq m < n$  (при  $m = 1$  это векторы), а также для тензорных углов

между ними или между их образами в  $n$ -мерном арифметическом пространстве. Генеральная норма имеет порядок  $\tau$ , равный рангу матрицы. Евклидова норма (или норма Фробениуса) имеет порядок 1. Теоретической базой для этих норм стали, во-первых, иерархическое генеральное неравенство для средних величин и, во-вторых, общие тригонометрические неравенства. Первое из них (иерархическое) даёт полную иерархию средних геометрических, алгебраических и степенных, в том числе в их реверсивных формах. Последующие из них (тригонометрические) обобщают неравенства Коши (косинусное) и Адамара (синусное) для общего случая определения скалярного угла между вышеуказанными объектами – линеорами или между их образами – планарами ранга  $m$  (при  $m = 1$  между векторами или прямыми). В качестве сопутствующего применения иерархического неравенства средних величин изложен глобальный предельный метод поэтапного вычисления всех корней векового уравнения спектрально положительной матрицы, а также дан более строгий необходимый признак положительности корней алгебраического уравнения, нежели классический признак Декарта.

Главным же результатом монографии, на наш взгляд, является создание в полномасштабных формах тензорной тригонометрии – в трёх естественным образом дополняющих друг друга формах: проективной, рефлексивной и моторной. Определены и изучены два типа моторных тригонометрических преобразований: ротационные (синусно-косинусные) и деформационные (тангенсно-секансные). В свою очередь, ротационные преобразования через их полярное представление подразделены на сферические, гиперболические и ортосферические. Между всеми сферическими и гиперболическими понятиями установлены дуальные отношения на основе широко используемой в работе сферическо-гиперболической аналогии в абстрактной и конкретной формах в исходном универсальном базисе.

Дано сходное определение квазиеуклидовых и псевдоевклидовых пространств, а также их собственных тензорных тригонометрических преобразований – как ротационных, так и орторефлексивных через фундаментальный рефлектор-тензор и квадратичную метрику базового  $n$ -мерного арифметического пространства .

В парах (сферическое, ортосферическое), (гиперболическое, орто-сферическое) ротационные тригонометрические преобразования образуют две некоммутативные группы. Первая из них есть группа квазиеуклидовых ротаций. Вторая из них – группа псевдоевклидовых ротаций, или группа Лоренца. Пересечение этих двух групп есть подгруппа ортосферических ротаций. Гиперболические и сферические ротации, вообще говоря, не образуют собственных подгрупп.

В свою очередь, аналогичные им два собственных множества орторефлексивных преобразований (в квазиевклидовом и псевдоевклидовом пространствах с одним и тем же рефлектор-тензором) с общим их пересечением в виде подмножества ортосферических рефлексий не образуют собственных групп.

Тензорная тригонометрия, в принципе, применима в решении разнообразных задач геометрий с квадратичными инвариантами, реализуемых в многомерных арифметических пространствах и во вложенных в них подпространствах постоянной кривизны. В качестве отдельных примеров специфического применения новых методов тензорной тригонометрии в линейной алгебре дано спектральное представление собственных проекторов, тригонометрическая теория простых квадратных корней из единичной матрицы, а также показана тригонометрическая природа коммутативности и антисимметрии простых матриц.

Основная часть монографии состоит из двух разделов. В первом из них (главы 1 – 4) рассматривается ряд аспектов теории точных матриц, необходимых для обоснования вновь вводимых геометрических и тригонометрических характеристик матричных объектов в многомерных арифметических пространствах с квадратичной метрикой. Второй раздел (главы 5 – 12) посвящён тензорной тригонометрии.

В качестве весьма важного частного и простейшего случая дано представление тензорных тригонометрических ротаций и деформаций в элементарных формах (то есть с одним собственным углом движения и с реперной осью для его отсчёта). Показано, что при этом открываются новые интересные возможности для изучения движений в неевклидовых геометриях постоянной кривизны и в теории относительности. Эти вопросы освещаются в монографии достаточно подробно в отдельном приложении (главы 1А – 10А).

Отметим также то особое обстоятельство, что монография с данным приложением выходит в свет в преддверии отмечаемых научным миром в 2004 – 2005 г. двух знаменательных Юбилеев: 175-летия со времени первой и основополагающей публикации по неевклидовой геометрии – «О началах геометрии» Н. И. Лобачевского, а затем «Аппендикса» Я. Больяи, и 100-летия со времени открытия Г. Лоренцем, А. Пуанкаре и А. Эйнштейном изначальных законов теории относительности.

Именно этим историческим событиям в фундаментальной науке и их великим творцам она посвящается.

В заключение автор считает своим долгом почтить светлую память известного российского математика Михаила Михайловича Постникова, просмотревшего незадолго до своей безвременной кончины рукопись монографии и давшего на неё положительный отзыв.

## Используемые обозначения

### 1. Обозначения матриц (матричный алфавит)

- $A$  – прямоугольная матрица или  $n \times r$ -линеор,  
 $\{\text{lig } (t)A\}$  – субматрица строк  $A$  порядка  $t$ ,  
 $\{\text{col } (t)A\}$  – субматрица столбцов  $A$  порядка  $t$ ,
- $A^+$  – (сферически ортогонально) квазиобратная матрица Мура – Пенроуза,
- $B$  – квадратная матрица или внешняя мультипликация линеоров  $A_1$  и  $A_2$ ,
- $B^-$  – аффинно (гиперболически ортогонально) квазиобратная матрица,
- $B_i = (B - \mu_i I)$  –  $i$ -я собственная матрица для  $B$ ,
- $B_p$  – нуль-простая матрица,
- $\overleftarrow{B}$  или  $\overleftarrow{B}_p$  – аффинный проектор на  $\langle \text{im } B \rangle$  параллельно  $\langle \ker B \rangle$  или гиперболически ортогональный проектор на  $\langle \text{im } B \rangle$ ,
- $\overrightarrow{B}$  или  $\overrightarrow{B}_p$  – аффинный проектор на  $\langle \ker B \rangle$  параллельно  $\langle \text{im } B \rangle$  или гиперболически ортогональный проектор на  $\langle \ker B \rangle$ ,
- $B_m$  и  $B_n$  – (адекватно и эрмитово)нуль-нормальные матрицы,
- $\overleftarrow{B}^*$  или  $\overleftarrow{B}_m$  ( $\overleftarrow{B}_n$ ) – сферически ортогональный проектор на  $\langle \text{im } B \rangle$ ,
- $\overrightarrow{B}^*$  или  $\overrightarrow{B}_m$  ( $\overrightarrow{B}_n$ ) – сферически ортогональный проектор на  $\langle \ker B \rangle$ ,
- $\{D\text{-minor } (t)B\}$  – диагональный минор  $B$  порядка  $t$ ,
- $\{Dh\text{-minor } (t)B\}$  – гиподиагональный минор  $B$  порядка  $t$ ,
- $C$  – внутренняя мультипликация линеоров  $A_1$  и  $A_2$  или свободный матричный множитель, в том числе клеточный,
- $C_\mu$  – матрица клеточной формы,
- $D$  – диагональная матрица,
- $D\{P\}$  – диагональная форма простой матрицы  $P$ ,

- Е – матрица единичного полирёберного угла,  
 $\tilde{E}$  – матрица единичного базиса,  
F – матрица-функция,  
G – метрический тензор,  
 $G^\oplus$  и  $G^{\otimes}$  – метрические тензоры риманова и псевдориманова пространства,  
H – (эрмитово симметричная) эрмитова комплексная матрица,  
I – единичная матрица,  
 $\{\sqrt{I}\}_S$  и  $I^\oplus$  – фундаментальный рефлектор-тензор квази- или псевдоевклидова пространства, ориентированного и нет,  
J – матрица жордановой формы,  
K – матричный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы В порядка t либо 1-го рода  $K_1(B,t)$ , либо 2-го рода  $K_2(B,t)$ ,  
 $K_B(\varepsilon)$  – матричный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы B,  
L – треугольная матрица,  $L_\mu$  – матрица клеточной треугольной формы,  
M – (адекватно) нормальная вещественная или комплексная матрица,  
N – (эрмитово) нормальная комплексная матрица,  
O – нильпотентная матрица,  
P – простая матрица,  
Q – редуцированный матричный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы В порядка t либо 1-го рода  $Q_1(B,t)$ , либо 2-го рода  $Q_2(B,t)$ ,  
 $Q_B(\varepsilon)$  – редуцированный матричный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  матрицы B,  
R – (адекватно) ортогональная вещественная или комплексная матрица,  
 $R_q$  – квазиортогональная матрица,  
S – симметричная матрица,  
 $S^\oplus$  – положительно определённая симметричная матрица,  
T – матрица ротационного тригонометрического преобразования,  
U – (эрмитово ортогональная) унитарная комплексная матрица,  
V – матрица общего линейного преобразования (активного и пассивного),  
W – моно-бинарная клеточная форма простой матрицы,  
X и Y – матрица-аргумент,  
Z – нулевая матрица.

## 2. Обозначение тензорных углов и их функций

$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}'$  и  $\Phi = -\Phi'$  – основной сферический угол, проективный и моторный,

$\text{Rot } \Phi (\text{rot } \Phi)$  – матрица ротации на угол  $\Phi$ , в том числе элементарной,  
 $\text{Def } \Phi (\text{def } \Phi)$  – матрица деформации на угол  $\Phi$ ,

$\xi = (\pi/2 - \Phi)$  – дополнительный к  $\Phi$  (до прямого угла  $\pi/2$ ) сферический угол (все три угла отвечают рефлектор-тензору),

$\tilde{\Gamma} = -\tilde{\Gamma}'$  и  $\Gamma = \Gamma'$  – основной гиперболический угол, проективный и моторный,

$\text{Roth } \Gamma (\text{roth } \Gamma)$  – матрица ротации на угол  $\Gamma$ , в том числе элементарной,  
 $\text{Defh } \Gamma (\text{defh } \Gamma)$  – матрица деформации на угол  $\Gamma$ ,

$\Lambda$  – дополнительный к  $\Gamma$  (до бесконечного прямого угла  $\Delta$ ) гиперболический угол (все три угла отвечают рефлектор-тензору),

$\Theta$  – ортосферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Phi$  или  $\Gamma$ ,

$\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi} + i \cdot \tilde{\Gamma}$  и  $\Psi = \Phi + i \cdot \Gamma$  – комплексные сферические углы, проективный и моторный,

$\tilde{\Sigma} = \tilde{\Xi}^*$  и  $\Sigma = -\Xi^*$  – эрмитов сферический угол, проективный и моторный.

## 3. Обозначения пространств

$\langle \mathcal{A}^n \rangle$  – арифметическое (аффинное) пространство размерности  $n$ ,

$\langle \mathcal{E}^n \rangle$  – евклидово пространство размерности  $n$ ,

$\langle \mathcal{E}^{n+q} \rangle$  – комплексное бинарное евклидово (псевдоевклидово) пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ ,

$\langle \mathcal{P}_k \rangle$  – подпространства пересечений собственных пространств,

$\langle P^{n+q} \rangle$  – вещественное псевдоевклидово пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ ,

$\langle Q^{n+q} \rangle$  – вещественное квазиеуклидово пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ .

#### 4. Прочие обозначения

$C_n^t$  – биномиальные коэффициенты Ньютона ,

$\|A\|_F$  – норма Фробениуса матрицы A ,

$\|A\|_t^h$  – определённая геометрическая норма матрицы или линеора A порядка t и степени h ,

$|\{B\}|_t^h$  – полуопределенная геометрическая норма квадратной матрицы B порядка t и степени h ,

$\det B$  – детерминант (определитель) матрицы B ,

$\dim \dots$  – размерность пространства ...,

$\mathcal{D}(r)B$  – дианаль квадратной матрицы B, численно равная сумме детерминантов всех её базисных диагональных миноров ,

$\langle \text{im } B \rangle$  – образ матрицы B,  $\langle \text{im } A \rangle$  – образ матрицы A ,

$\langle \ker B \rangle$  – ядро матрицы B,  $\langle \ker A \rangle$  – ядро матрицы A ,

$k(B,t)$  – скалярный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы B порядка t ,

$k_B(\varepsilon)$  – скалярный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы B ,

$\ell$  и  $\hat{\ell}$  – евклидова и псевдоевклидова протяжённость ,

$\overline{m}_t$  и  $\overline{M}_\theta$  – средние алгебраические и средние степенные порядка t и  $\theta$  ,

$\mathcal{M}(r)A$  – минорант матрицы A, численно равный квадратному корню из суммы квадратов детерминантов всех её базисных миноров ,

n – размерность аффинного или евклидова пространств ,

$q(B,t)$  – редуцированный скалярный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы B порядка t ,

$q_B(\varepsilon)$  – редуцированный скалярный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы B ,

$r = \text{rang } B$  или  $\text{rang } A$  – ранг матрицы ,

$r'$  – 1-й рок сингулярной матрицы B, то есть максимальный порядок ненулевого коэффициента  $k(B,t)$  ,

$r''$  – 2-й рок сингулярной матрицы B, то есть максимальный порядок ненулевых коэффициентов  $K_{1,2}(B,t)$  ,

$s_i = (n - r_i)$ ,  $s'_i = (n - r'_i)$  и  $s_i^\circ = (r''_i - r'_i + 1)$  – геометрическая, алгебраическая и аннулирующая кратность собственного значения  $\mu_i$  ,

$t$  (или  $\theta$ ) – порядок характеристик (либо размер выборки из совокупности чисел, либо размер миноров матрицы),

$\text{tr } B$  – след B ,

$\overline{v}_t$  и  $\overline{V}_\theta$  – реверсивные средние алгебраические и средние степенные порядка t и  $\theta$  .

- $\gamma$  – скалярный основной гиперболический угол ,  
 $\varepsilon$  – скалярный сферический эрмитов угол ,  
 $\theta$  – скалярный угол ортосферической ротации, ортогональной по отношению к  $\varphi$  или  $\gamma$  ,  
 $\lambda$  – дополнительный к  $\gamma$  (до бесконечного прямого угла  $\delta$ ) гиперболический угол ,  
 $\mu_i$  –  $i$ -е собственное значение матрицы  $B$  ,  
 $v'$  – размерность пространства пересечения  $\text{im } A_1$  и  $\text{im } A_2$  ,  
 $v''$  – размерность пространства пересечения  $\text{im } A_1$  и  $\ker A'_2$  (или  $\text{im } A_2$  и  $\ker A'_1$  ),  
 $\xi$  – дополнительный к  $\varphi$  (до прямого угла  $\pi/2$ ) сферический угол ,  
 $\pi$  – открытый сферический угол ,  
 $\sigma_i$  –  $i$ -е собственное значение матрицы  $AA'$  или  $A'A$  ,  
 $\varphi$  – скалярный основной сферический угол ,  
 $\omega = \text{Arsh } 1$  – особый гиперболический угол, отвечающий фокусу гиперболы.

## 5. Используемые символы

- ' – знак простого транспонирования,  
 $*$  – знак эрмитового транспонирования,  
 $\subset$  – множество... принадлежит множеству...,  
 $\subseteq$  – множество... принадлежит или тождественно множеству...,  
 $\in$  – элемент... принадлежит множеству...,  
 $\notin$  – элемент... не принадлежит множеству...,  
 $\cup$  – знак объединения множеств,  
 $\cap$  – знак пересечения множеств,  
 $\equiv$  – знак тождества множеств,  
 $\oplus$  – знак прямого суммирования,  
 $\circledcirc$  – знак сферически ортогональной прямой суммы,  
 $\circledast$  – знак гиперболически ортогональной прямой суммы,  
 $\sim$  – обозначение для тензорных углов (сверху) проективного типа,  
 $\leftarrow$  – обозначение для тензорных углов (сверху) в случае многоступенчатых ротаций с обратным порядком частных движений.

## **Раздел I. Ряд общих вопросов теории точных матриц**

Тензорная тригонометрия базируется на монобинарном тригонометрическом спектре всех собственных проекторов так называемой нуль-простой  $n \times n$ -матрицы, у которой её образ и ядро образуют прямую сумму. Полный тригонометрический спектр имеют простые матрицы. Существенную роль в выводе и строгом обосновании тригонометрического спектра для нуль-простой  $n \times n$ -матрицы играют коэффициенты её характеристических многочленов – скалярного и матричного. Соответственно структура и свойства скалярных и матричных коэффициентов детально изучаются в главе 1. Здесь формулируется и доказывается в целом генеральное неравенство для средних величин, включающее цепь частных неравенств Маклорена для средних алгебраических – основы вводимых впоследствии иерархических норм. Показаны также его дополнительные возможности в теории решения алгебраических уравнений. Исходя из найденной структуры матричных характеристических коэффициентов высшего порядка  $n \times n$ -матрицы идентифицирован её минимальный аннулирующий многочлен. В главе 2 устанавливаются явные формулы для собственных проекторов нуль-простой матрицы через её характеристические коэффициенты высшего порядка. Как весьма важный частный случай, дополнительно вводятся и изучаются нуль-нормальные матрицы, у которых образ и ядро образуют прямую ортогональную сумму. В главе 3 определяются скалярные характеристики матриц, имеющие косинусную и синусную природу и обобщающие известные алгебраические нормы для косинуса и синуса угла между векторами в евклидовом арифметическом пространстве. При этом здесь вводятся в рассмотрение в качестве общих линейных геометрических объектов – линеоры  $A$  и планары  $\langle im A \rangle$ , задаваемые  $n \times m$ -матрицами, где  $1 \leq m \leq n$  (в частности, при  $m = 1$  это векторы и прямые). В главе 4 рассматриваются альтернативные варианты комплексификации характеристик – адекватный и эрмитов при переходе от вещественного арифметического пространства к комплексному. Дан ряд конкретных примеров обоих подходов.

# Глава 1. Коэффициенты характеристических многочленов

## § 1.1. Совместное определение скалярных и матричных коэффициентов

В теории точных матриц особое место занимает раздел, относящийся к характеристическим многочленам. Он включает алгебраические и геометрические аспекты. Их детальная проработка необходима нам для последующего построения фундамента тензорной тригонометрии.

Как известно, каждая  $n \times n$ -матрица имеет своё *вековое алгебраическое уравнение*. Его задаёт *скалярный характеристический многочлен* от параметра  $\mu$ , то есть многочлен со скалярными коэффициентами. Решения векового уравнения суть собственные значения матрицы  $\mu_i$ . С другой стороны, та же  $n \times n$ -матрица имеет *матричный характеристический многочлен* от параметра  $\mu$ , то есть многочлен с матричными коэффициентами. В данной работе указанные характеристические многочлены квадратной матрицы применяются, как правило, в *знакопостоянной форме* от противоположного скалярного параметра  $\varepsilon = -\mu$ . Введём в рассмотрение сразу же оба типа характеристических многочленов и их коэффициентов, например, по методу Д. К. Фаддеева [45].

Пусть  $B$  есть ненулевая  $n \times n$ -матрица ранга  $r$ ,  $I$  – единичная матрица. Обратимся к следующему преобразованию (резольвенте матрицы):

$$(B + \varepsilon I)^{-1} = \frac{(B + \varepsilon I)^V}{\det(B + \varepsilon I)} = \frac{K_B(\varepsilon)}{k_B(\varepsilon)}. \quad (1)$$

По существу это есть обычная формула обращения квадратной матрицы  $(B + \varepsilon I)$  в виде дроби, в числителе которой находится присоединённая к ней матрица, а в знаменателе детерминант; где  $\varepsilon$  – *произвольный скалярный параметр*. При указанной операции обращения получаются сразу оба характеристических многочлена от  $\varepsilon$ , а именно *скалярный* порядка  $n$  в знаменателе дроби и *матричный* порядка  $(n - 1)$  в её числителе:

$$k_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^n k(B,t) \cdot \varepsilon^{n-t} = \varepsilon^n + \operatorname{tr} B \cdot \varepsilon^{n-1} + \dots + \det B,$$

$$K_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n-1} K_t(B,t) \cdot \varepsilon^{n-t-1}.$$

В данных многочленах присутствуют скалярные  $k(B,t)$  и матричные  $K_t(B,t)$  характеристические коэффициенты для исходной матрицы  $B$ . Причём последние – пока 1-го рода, а матричные коэффициенты 2-го рода  $K_2(B,t)$  будут определены позднее. Последовательно увеличивающееся число  $t$  есть порядок этих скалярных и матричных коэффициентов. Противоположный параметр  $\mu = -\varepsilon$  относится к собственным значениям матрицы  $B$ . Аналогичный скалярный многочлен от параметра  $\mu$  для матрицы  $B$  и её вековое уравнение используются в знакопеременной форме:

$$k_B(-\mu) = (-\mu)^n + \operatorname{tr} B \cdot (-\mu)^{n-1} + \dots + \det B = 0.$$

Поэтому определённые выше скалярные коэффициенты порядка  $t$  представляют собой суммы Виета или суммы детерминантов всевозможных диагональных миноров размера  $t \times t$ , но без изменения алгебраического знака перед ними. Согласно методу Леверье [45], для матрицы  $B$  они вычисляются по рекуррентной формуле Варинга, где осуществляется замена сумм Виета на её характеристические скалярные коэффициенты, а сумм Варинга на её характеристические следы одного и того же порядка  $t$ :

$$k(B,t) = \frac{1}{t!} \cdot \sum_{\theta=1}^t (-1)^{\theta-1} \cdot k(B,t-\theta) \cdot \operatorname{tr} B^\theta. \quad (2)$$

Это есть рекуррентная формула Варинга – Леверье *прямого* типа. Аналогичная формула для тех же коэффициентов, но выраженная в явном виде, представляет больше теоретический интерес [27, с. 38]

$$k(B,t) = \frac{1}{t!} \cdot \det \begin{vmatrix} \operatorname{tr} B & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{tr} B^2 & \operatorname{tr} B & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{tr} B^{t-1} & \operatorname{tr} B^{t-2} & \operatorname{tr} B^{t-3} & \dots & t-1 \\ \operatorname{tr} B^t & \operatorname{tr} B^{t-1} & \operatorname{tr} B^{t-2} & \dots & \operatorname{tr} B \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) получаются из системы линейных уравнений Ньютона с  $n$  известными корнями относительно  $n$  неизвестных коэффициентов применением той же схемы замены. Последовательность скалярных коэффициентов или сумм Виета, согласно системе линейных уравнений Ньютона, взаимно-однозначно связана с такой же последовательностью характеристических следов или сумм Варинга вплоть до порядка  $t = r' = \min\{\text{rang } B^h\} \leq r$ , то есть до минимума ранга указанной степенной матрицы. (При  $t > r'$  все скалярные характеристические коэффициенты порядка  $t$  обнуляются.) Параметр  $r'$  для матрицы  $B$  здесь определяется как её 1-й рок. (В дальнейшем будет видно, что обнулению матричных характеристических коэффициентов отвечает некий 2-й рок  $r''$ .) Решение любых задач, связываемых изначально со скалярными коэффициентами, можно рассматривать также исходя из значений характеристических сумм Варинга, а для матриц – значений характеристических следов.

## § 1.2. Генеральное неравенство средних величин

Во втором разделе основной части монографии особое значение имеют положительно (полу)определенные ранга  $r$  симметричные или эрмитовы матрицы и их скалярные инварианты. Для таких матриц вековое уравнение в принятой знакопеременной форме имеет необходимо положительные скалярные коэффициенты вплоть до порядка  $r' = r = \text{rang } B$ . Кроме того, все  $n$  его решений (собственных значений) – вещественные неотрицательные числа. Для совокупности  $n$  неотрицательных чисел  $\mu_i$ , причём  $r \leq n$  из них ненулевые, определим специальные характеристики – малые медианы (или средние алгебраические), большие медианы (или средние степенные):

$$\overline{m}_1 = \overline{M}_1 = \sum \frac{\mu_i}{n}, \quad (4)$$

$$\overline{m}_t = \sqrt[t]{s_t(\mu_i) / C_n^t} = \sqrt[t]{k(B, t) / C_n^t}, \quad (5)$$

$$\overline{M}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta(\mu_i) / n} = \sqrt[\theta]{\text{tr } B^\theta / n}, \quad (6)$$

где черта сверху означает усреднение. Здесь  $s_t(\mu_i)$  – суммы Виета,  $S_\theta(\mu_i)$  – суммы Варинга,  $n$  – размер совокупности чисел или матрицы,  $t$  или  $\theta$  – порядок соответствующих средних величин,  $C_n^t$  – биномиальные коэффициенты Ньютона. (Среднее арифметическое

$\overline{m}_1 = \overline{M}_1$  является пересечением множеств средних алгебраических и средних степенных.)

При  $t > r$  малые медианы вырождаются в нуль, что имеет место при наличии нулевых исходных чисел. Если же таковые отсутствуют, то могут быть полезными реверсивные аналоги малых и больших медиан, которые определяются как

$$\overline{v}_1 = \overline{V}_1 = \left( \sum \frac{\mu_i^{-1}}{n} \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$\overline{v}_t = \sqrt[t]{s_t(\mu_i^{-1}) / C_n^t} = \sqrt[t]{k(B^{-1}, t) / C_n^t}, \quad (8)$$

$$\overline{V}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta(\mu_i^{-1}) / n} = \sqrt[\theta]{\text{tr } B^{-\theta} / n}. \quad (9)$$

Они производятся как обращённые средние от обратных исходных чисел и также являются средними величинами. Например, если прямая медиана относится к косинусному инварианту, то реверсивная медиана относится к секансному инварианту, но обратна ему, как и должно быть для секанса. (Среднее геометрическое  $\overline{m}_n = v_n$  является пересечением множеств средних алгебраических и их реверсивных аналогов.)

Для совокупности  $n$  вещественных положительных чисел  $\langle \mu_i \rangle$ , из которых хотя бы одно число отличается от другого, имеет место генеральное неравенство средних величин, охватывающее всю область данной совокупности:

$$\max \langle \mu_i \rangle = \overline{M}_\infty > \dots > \overline{M}_0 > \dots > \overline{M}_1 = \quad (10)$$

$$= \overline{m}_1 > \dots > \overline{m}_t > \dots > \overline{m}_n = \quad (11)$$

$$= \overline{v}_n > \dots > \overline{v}_t > \dots > \overline{v}_1 = \quad (12)$$

$$= \overline{V}_1 > \dots > \overline{V}_\theta > \dots > \overline{V}_\infty = \min \langle \mu_i \rangle \quad (13)$$

( $t = 1, \dots, n$ ;  $\theta = 1, \dots, \infty$ ).

Знак же равенства, причём сразу для всех медиан (средних величин), имеет место тогда и только тогда, когда  $\mu_1 = \dots = \mu_n$ . Если бы совокупность содержала  $S = n - r$  нулевых чисел, то цепь неравенств вырождалась справа, начиная с  $\overline{m}_{r+1}$ , а слева все медианы оставались ненулевыми. При этом в случае равенства ненулевых чисел между собой медианы изменялись бы как функции:

$$\overline{m}_t = \mu \cdot \sqrt[t]{C_r^t / C_n^t}, \quad \overline{M}_\theta = \mu \cdot \sqrt[\theta]{r/n}.$$

Генеральное неравенство содержит как частные случаи неравенство Коши для средних арифметического и геометрического и его реверсивный аналог для средних гармонического и геометрического, неравенство Маклорена для средних алгебраических и его реверсивный аналог и неравенство Гёльдера для средних степенных и его реверсивный аналог [3, 47]. Для спектрально положительной матрицы (для которой  $\mu_i > 0$ ) определим, в частности, арифметическую, геометрическую и гармоническую медианы:

$$\overline{m}_1 = \operatorname{tr} B / n = \overline{M}_1, \quad (14)$$

$$\overline{m}_n = \sqrt[n]{\det B} = \overline{v}_n, \quad (15)$$

$$\overline{v}_1 = (\operatorname{tr} B^{-1} / n)^{-1} = \overline{V}_1. \quad (16)$$

Если  $B = AA'$ , где  $A$  есть  $n \times m$ -матрица и, в частности,  $A = a$  есть  $n \times 1$ -вектор, то арифметическая медиана выражается через нормы Фробениуса и Евклида как

$$n \cdot \overline{m}_1(B) = \operatorname{tr} B = \begin{cases} \|A\|_F^2, \\ \|a\|_E^2. \end{cases}$$

Для спектрально положительной матрицы ( $\mu_i > 0$ ) в соответствии с вышеуказанным генеральным неравенством справедливы оценки:

$$\max \langle \mu_i^n \rangle \geq \operatorname{tr} B^n / n \geq (\operatorname{tr} B / n)^n \geq \det B \geq (\operatorname{tr} B^{-1} / n)^{-n} \geq (\operatorname{tr} B^{-n} / n)^{-1} \geq \min \langle \mu_i^n \rangle. \quad (17)$$

Дефекты этих неравенств тем меньше, чем ближе друг к другу все собственные значения матрицы. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда матрица прямо пропорциональна единичной матрице. Очевидно, что предельные медианы совпадают с крайними собственными значениями:

$$\max \langle \mu_i \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \overline{M}_\theta, \quad (18)$$

$$\min \langle \mu_i \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \overline{V}_\theta. \quad (19)$$

Далее рассмотрим доказательство сформулированного выше генерального неравенства средних величин в целом и его анализ. Воспользуемся дифференциальным методом изучения экстремума. Определим скалярные функции для разности и для отношения соответствующих средних величин из совокупности  $n$  положительных чисел  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), задающих радиус-вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$  в первом квадранте:

$$r \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}(x) = \overline{m}_t(x) - \overline{m}_{t+1}(x),$$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}(x) = \overline{m}_1(x) - \overline{m}_n(x),$$

$$f \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}(x) = \overline{m}_t(x) / \overline{m}_{t+1}(x),$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}(x) = \overline{m}_1(x) / \overline{m}_n(x),$$

$$R \begin{pmatrix} \theta + 1 \\ \theta \end{pmatrix}(x) = \overline{M}_{\theta+1}(x) - \overline{M}_\theta(x),$$

$$R \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}(x) = \overline{M}_\theta(x) - \overline{M}_1(x),$$

$$F \begin{pmatrix} \theta + 1 \\ \theta \end{pmatrix}(x) = \overline{M}_{\theta+1}(x) / \overline{M}_\theta(x),$$

$$F \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}(x) = \overline{M}_\theta(x) / \overline{M}_1(x).$$

Функции  $r$  и  $R$ , а также  $f$  и  $F$  имеют общее и единственное стационарное значение с аргументом-решением в форме центрального луча  $\langle b \rangle$  – биссектрисы первого квадранта, соответствующее их нулевому градиенту:

$$r'(b) = f'(b) = R'(b) = F'(b) = 0,$$

где  $b$  – любая точка этой биссектрисы, то есть это решение

$$x_1 = \dots = x_n = b;$$

$$r(b) = R(b) = 0, \quad f(b) = F(b) = 1.$$

Функции принимают минимальные значения, так как матрицы Гессе точно на биссектрисе-решении – положительно полуопределённые ранга  $(n-1)$ :

$$\begin{aligned} r'' \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}(b) &= (n-1) \cdot r'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}(b) = b \cdot f'' \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}(b) = b \cdot (n-1) \cdot f'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}(b) = \\ &= R'' \begin{pmatrix} \theta + 1 \\ \theta \end{pmatrix}(b) = 1/(\theta-1) \cdot R'' \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}(b) = b \cdot F'' \begin{pmatrix} \theta + 1 \\ \theta \end{pmatrix}(b) = b/(\theta-1) \cdot F'' \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}(b) = \frac{n \cdot I - I_t}{n^2 \cdot b} = G, \end{aligned}$$

где  $I_t$  есть *тотально-единичная* матрица, все элементы которой равны 1. Детерминанты главных миноров матрицы  $G$  порядка  $r$ :

$$\left(\frac{1}{n \cdot b}\right)^r \cdot \frac{n-r}{n} > 0 \quad \text{при } r < n.$$

Матрица Гессе вырождена вдоль биссектрисы – линейного подпространства размерности 1. Учитывая вышеуказанные стационарные значения функций, получаем:

$$r'', f'' \begin{pmatrix} t \\ t+m \end{pmatrix}(b) = m \cdot r'', f'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}(b);$$

$$R'', F'' \begin{pmatrix} \theta+m \\ \theta \end{pmatrix}(b) = m \cdot R'', F'' \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix}(b).$$

Этот анализ показывает, что на биссектрисе-решении  $\langle b \rangle$ , во-первых, матрицы Гессе отношений соседних средних величин не зависят от порядка; во-вторых, они изменяются аддитивно с ростом интервала между порядками; в-третьих, они совпадают для функций отношений между соседними средними степенными и отношения между средними арифметическим и геометрическим. Для отношений соседних средних алгебраических эта же матрица делится на  $(n - 1)$  равных частей. Но самое парадоксальное заключается в том, что матрица Гессе для функции отношения между средним степенным и средним арифметическим на биссектрисе неограниченно возрастает пропорционально порядку  $\theta$ . Хотя при  $\theta \rightarrow \infty$  в силу (18) эта же функция  $F$  стремится к отношению  $x_{\max}/M_1$ , изменяется непрерывно и на биссектрисе равна 1 (минимуму). Кроме того, матрица Гессе для функции отношения соседних средних степенных на биссектрисе даже при  $\theta \rightarrow \infty$  сохраняет постоянное значение. Хотя в силу (18) эта же функция  $F$  стремится к 1 независимо от аргумента, то есть к константе, для которой градиент и матрица Гессе нулевые. Эти, казалось бы, противоречивые факты объясняются влиянием соотношения бесконечно малого (отклонения аргумента от биссектрисы) и бесконечно большого (параметра  $\theta$ ). Вследствие чего в окрестности биссектрисы матрица Гессе терпит разрыв и становится нулевой. В свою очередь, функция  $F \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}(x)$  при  $\theta \rightarrow \infty$  имеет постоянное значение 1, но с точностью до бесконечно малой зависит от аргумента, принимая абсолютный минимум (1) на биссектрисе, где  $F \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix}(x)$  принимает сразу же это минимальное значение.

Более наглядно указанные закономерности можно продемонстрировать на модельной функции от одного скалярного аргумента, например:

$$F_1 \begin{Bmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{Bmatrix} (x) = \sqrt{\frac{1+x^{\theta+1}}{2}} \Bigg/ \sqrt{\frac{1+x^\theta}{2}},$$

$$F_2 \begin{Bmatrix} \theta \\ 1 \end{Bmatrix} (x) = \sqrt{\frac{1+x^\theta}{2}} \Bigg/ \frac{1+x}{2} \quad (\text{при } x > 0, \theta \geq 2).$$

Здесь  $x \geq 1$  играет роль аргумента и максимального элемента из выборки  $\langle 1, x \rangle$ . При конечном  $\theta$ :

$$F_1(1) = F_2(1) = 1 = \min, \quad F_2(x) > F_1(x) > 1;$$

$$\frac{d F_1}{dx}(1) = \frac{d F_2}{dx}(1) = 0;$$

$$\frac{d^2 F_1}{dx^2}(1) = \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2 F_2}{dx^2}(1) = \frac{\theta-1}{4}, \quad \frac{d^2 F_2}{dx^2}(x) \geq \frac{d^2 F_1}{dx^2}(x) > 0.$$

При бесконечном  $\theta$ :

$$F_1(x) = 1 + \beta(x), \quad \beta(x) \rightarrow 0, \quad \beta(1) = 0; \quad F_2(1) = 1 = \min,$$

$$F_2 \begin{Bmatrix} x > 1 \\ x < 1 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 2x/(1+x), \\ 2/(1+x); \end{cases}$$

$$\frac{d F_1}{dx}(x) = 0, \quad \frac{d F_2}{dx}(1) = 0, \quad \frac{d F_2}{dx}(1 \pm \alpha) = \pm \frac{1}{2} \quad (\alpha \rightarrow 0);$$

$$\frac{d^2 F_1}{dx^2}(1) = \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2 F_1}{dx^2} \begin{Bmatrix} x > 1 \\ x < 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\frac{d^2 F_2}{dx^2}(1) = \frac{\theta-1}{4} \rightarrow \infty, \quad \frac{d^2 F_2}{dx^2}(1 \pm \alpha) = 0 \quad (\alpha \rightarrow 0).$$

Ввиду разрыва матрицы Гессе в окрестности биссектрисы можно сделать вывод, что трёхвалентная симметричная матрица третьих производных при  $\theta \rightarrow \infty$  должна быть на биссектрисе бесконечной, но в отрицательной области. Отметим также, что для аналогичных функций реверсивных средних величин все вышеизложенные закономерности остаются в силе, но знак перед матрицами Гессе меняется на противоположный, а формальный их вид сохраняется. То же происходит, если в функциях отношений средних величин поменять местами числитель и знаменатель. Таким образом, с учётом предельных формул

(18) и (19), доказательство и анализ генерального неравенства средних величин нами завершён. Далее рассмотрим отдельные возможности его применения в теории решений алгебраических уравнений, в том числе векового уравнения квадратной матрицы.

### § 1.3. Предельный метод решения векового уравнения с вещественными корнями

Малые и большие медианы связаны системой модифицированных уравнений Ньютона и модифицированной рекуррентной формулой Варинга–Леверье, например *прямого* типа – аналог формулы (2), где при  $t > r \rightarrow \bar{m}_t = 0$ :

$$C_{n-1}^{t-1} \cdot (\bar{m}_t)^t = C_n^{t-1} \cdot (\bar{m}_{t-1})^{t-1} \cdot (\bar{M}_1)^1 - C_n^{t-2} \cdot (\bar{m}_{t-2})^{t-2} \cdot (\bar{M}_2)^2 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{t-2} \cdot C_n^1 \cdot (\bar{m}_1)^1 \cdot (\bar{M}_{t-1})^{t-1} + (-1)^{t-1} \cdot (\bar{M}_t)^t,$$

$$\text{где } C_{n-1}^{t-1} = C_n^{t-1} - C_n^{t-2} + \dots + (-1)^{t-2} \cdot C_n^1 + (-1)^{t-1}.$$

Предельные формулы (18) и (19) могут использоваться для последовательного вычисления всех корней алгебраического уравнения при условии, что все они – вещественные. Кратность каждого корня может находиться в процессе сокращения. Однако целесообразно предварительно отделить кратные корни, используя 1-ю производную и алгоритм Евклида. С применением метода Штурма и априорных границ вещественных корней ( $\pm\infty$ ) устанавливают их вещественность. Кроме того, вещественные корни уравнения, как известно, удовлетворяют неравенству для знакопеременной формы уравнения [27, с. 40]:

$$[-1 - \sqrt[h_1]{-\min k_j}] = \Delta^{(-)} < \mu_i < \Delta^{(+)} = [1 + \sqrt[h_2]{-\min (-1)^j \cdot k_j}],$$

где  $\Delta^{(-)}$  – граница отрицательных корней,  $\Delta^{(+)}$  – граница положительных корней,  $h_1$  и  $h_2$  – индексы первых отрицательных коэффициентов  $k_j$  и  $(-1)^j \cdot k_j$ .

*Предельный метод* решения алгебраического уравнения сводится к следующему. Пусть уже известно, что корни уравнения – вещественные неотрицательные числа. В частности, это суть собственные значения положительной матрицы типа  $AA'$ . Первый этап – вычисление сумм Виета и характеристических сумм Варинга вплоть до порядка  $r$ . Например, для матриц используется рекуррентная формула Варинга – Леверье *прямого* типа (2), а для самостоятельного уравнения *обратного* типа, которая при  $\theta > r$  имеет вид:

$$\begin{aligned} S_0 &= s_1 \cdot S_{\theta-1} - s_2 \cdot S_{\theta-2} + \dots + (-1)^{\theta-2} \cdot s_{\theta-1} \cdot S_{\theta-\theta+1} + (-1)^{\theta-1} \cdot s_\theta \cdot S_{\theta-\theta} = \\ &= F_\theta(S_1, \dots, S_r) = f_\theta(s_1, \dots, s_r), \\ \theta &= r+1, r+2, \dots \end{aligned}$$

Откуда далее последовательно вычисляются средние степенные:

$$\overline{M}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta / r}.$$

Причём приближение к цели идёт именно снизу, согласно неравенству (10). Очевидно, что скорость процесса тем выше, чем более различны корни уравнения между собой. Подставив в вышеуказанную рекуррентную формулу предельное значение (18) и сократив общий множитель  $x^{\theta-n}$ , получим исходное уравнение как тождество. Именно поэтому на каком-то этапе вычисления обрываются из-за неминуемой ошибки округления. Так находится максимальный корень. Минимальный ненулевой корень, согласно (19), можно вычислять аналогично, используя реверсивную форму алгебраического уравнения, то есть поделив исходное уравнение на  $x^n$  и старший коэффициент  $a_n$ .

Если корни уравнения – точные рациональные числа, то в процессе последовательного приближения у результата неизбежно появляются цифровые периоды после некоторой значащей цифры. Исходя из этого вычисляется точное значение корня с проверкой по заданному уравнению. *Иrrациональные* корни вычисляются с задаваемой степенью точности. Таким образом, применяя соответствующий алгоритм, последовательно находят все корни алгебраического уравнения. Обратим внимание на то, что изложенный метод, близкий по идеи к методу Лобачевского – Греффе (1834г), по сути, имеет глобальный характер. Все исходные расчётные характеристики в нём строго предопределены.

Если же уравнение имеет вещественные законопределённые корни, то вначале сместим аргумент, например, в область положительных корней, но, по возможности, меньше – для большей скорости сходимости. Априори, как известно, вещественные собственные значения имеют вещественные симметричные матрицы  $S = S'$  и мнимые кососимметричные матрицы  $(iK)' = -iK$ , где  $K' = -K$  вещественные. Для вещественной  $B$  это могут быть соответствующие характеристические матрицы:

$$S_B = (B + B')/2, \quad K_B = (B - B')/2 \quad (B = S_B + K_B).$$

В случае  $S_B \cdot K_B = K_B \cdot S_B \leftrightarrow B \in \langle M \rangle$  – нормальная матрица. Тогда они вместе приводятся к диагональной форме. Их собственные

значения суммируются для суммы этих матриц. Следовательно, решая отдельные уравнения для  $S_M$  и  $-iK_M$  (последнее – биквадратное), можно получить также отдельно вещественные и сопряжённые мнимые части комплексных собственных значений матрицы  $M$ . Далее остаётся сделать подбор соответствующих пар путём проверки на вековом уравнении для  $M$ .

Аналогичный подход с использованием эрмитова сопряжения распространяется на комплексные матрицы. Среди них априори вещественные собственные значения имеют эрмитовы матрицы. Для комплексной эрмитово нормальной матрицы используется разложение:

$$H_B = (B + B^*) / 2, \quad Q_B = (B - B^*) / 2 \quad (B = H_B + Q_B = H_B + i \cdot H_Q),$$

$$H_B \cdot Q_B = Q_B \cdot H_B \leftrightarrow H_B \cdot H_Q = H_Q \cdot H_B \leftrightarrow B \in \langle N \rangle, \text{ где } N \cdot N^* = N^* \cdot N, \text{ и т.д.}$$

Таким образом, множество матриц, которые априори подходят для использования предельного метода, включает вещественные нормальные матрицы и комплексные эрмитово нормальные матрицы. Пусть для матрицы или для уравнения с вещественными корнями используется метод смещения. Тогда для знакопеременной формы уравнения нижняя граница отрицательных корней удовлетворяет неравенству:

$$\min \langle \mu_i \rangle > \Delta^{(-)} = -1 - \sqrt{-\min k_j}.$$

После подстановки  $x = y + \Delta^{(-)}$  получаем уравнение с положительными коэффициентами и корнями. (Проверяется методом Штурма в интервале  $+\infty \div 0$ .) Для матрицы преобразование смещения трактуется как

$$B \rightarrow \{B - \Delta^{(-)} \cdot I\}.$$

Альтернатива вышеуказанному методу смещения для матриц с вещественными закономерно определёнными собственными значениями: возведение матрицы в квадрат, далее вычисление квадратов собственных значений и затем подбор их знаков по вековому уравнению для исходной матрицы.

*В случае вещественности и положительности всех корней алгебраического уравнения максимальный корень в явной форме теоретически выражается как*

$$\max \langle \mu_i \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \sqrt[\theta]{S_\theta / r}, \quad (20)$$

$$\text{где } S_{\infty} = \det \begin{vmatrix} 1 \cdot k_1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -2 \cdot k_2 & k_1 & -1 & 0 & \dots \\ 3 \cdot k_3 & -k_2 & k_1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{r-1} \cdot r \cdot k_r & (-1)^{r-2} \cdot k_{r-1} & (-1)^{r-3} \cdot k_{r-2} & (-1)^{r-4} \cdot k_{r-3} & \dots \\ 0 & (-1)^{r-1} \cdot k_r & (-1)^{r-2} \cdot k_{r-1} & (-1)^{r-3} \cdot k_{r-2} & \dots \\ 0 & 0 & (-1)^{r-1} \cdot k_r & (-1)^{r-2} \cdot k_{r-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Согласно признаку Сильвестра, для положительной определённости симметричной или эрмитовой матрицы необходимо и достаточно, например, чтобы детерминанты всех угловых миноров были положительные. Поскольку последний из них – детерминант матрицы, то это означает и её несингулярность. С другой стороны, для неотрицательности тех же, но сингулярных матриц необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты векового уравнения вплоть до порядка  $r$  были положительные и при  $t > r$  нулевые. Это следует из правила знаков Декарта и вещественности корней. Из вышесказанного можно сделать вывод, что элементы нормальных матриц содержат достаточно первоначальной информации, чтобы решить задачу об отыскании их собственных значений, сведя её к алгебраическому уравнению с положительными корнями, (что требуется для предельного метода). Решение аналогичной задачи для матриц более общего вида или для самостоятельного алгебраического уравнения при  $n > 4$  зависит от ответа на вопрос: «Имеет ли вещественное алгебраическое уравнение комплексные сопряжённые корни или нет?». Выше было указано, что точный ответ на него всегда можно получить с помощью метода Штурма. Однако этот метод не даёт необходимых и достаточных условий, которым вообще должны удовлетворять коэффициенты уравнения для вещественности всех его корней или с учётом метода смещения – для положительности всех корней.

Первоочередное необходимое условие положительности и, вместе с тем, вещественности всех корней, согласно признаку Декарта, заключается в положительности всех коэффициентов (для знакопеременной формы алгебраического уравнения). Однако это

не гарантирует, что не имеется пар комплексных сопряжённых корней. Например, при выборе ещё большего параметра смещения  $(-\Delta) = 1 + \max |k_j|$  можно гарантировать только то, что вещественные их части будут положительные [27, с. 39].

*Согласно цепи (11) генерального неравенства средних, для алгебраического уравнения с вещественными положительными корнями различные медианы могут совпадать, причём всегда вместе, тогда и только тогда, когда уравнение имеет биномиальную форму*

$$(x - \mu)^n = 0 \leftrightarrow \bar{m}_t = \mu.$$

При отличии хотя бы двух корней друг от друга коэффициенты уравнения уже не соответствуют биномиальному ряду, при этом действует неравенство (11). Например, совпадение каких-либо соседних медиан, обнуление коэффициентов до  $t = r$ , нарушение иерархии медиан – это отклонения, которые свидетельствуют о том, что уравнение с неотрицательными коэффициентами имеет комплексные сопряжённые корни.

*Поэтому более строгое необходимое условие вещественности и положительности корней уравнения заключается как в положительности его коэффициентов, так и в выполнении цепи (11) генерального неравенства или любого отрезка цепи из  $r$  медиан.*

Заметим также, что для любой алгебраической медианы при условии  $1 \leq p < q$  в силу (10)

$$\sqrt[p]{\bar{m}_i(x_1^p, \dots, x_n^p)} < \sqrt[q]{\bar{m}_i(x_1^q, \dots, x_n^q)},$$

где  $(n - 1) \geq i \geq 1$  и хотя бы два элемента различны, а количество ненулевых элементов больше  $i$ .

## § 1.4. Структура и основные свойства скалярных и матричных характеристических коэффициентов

Пусть  $O$  – нильпотентная матрица, коммутирующая с  $B$ . Тогда

$$k(\{B \cdot O\}, t) = 0, \quad (21)$$

$$k(\{B + O\}, t) = k(B, t). \quad (22)$$

Как известно, у нильпотентной матрицы все скалярные характеристические коэффициенты нулевые. Но  $B \cdot O = O \cdot B$  – также нильпотентная. Если в (3) подставить  $\{B + O\}$ , то в детерминанте все

слагаемые, содержащие  $O$  в произведениях, – нулевые. Откуда следуют обе формулы. В частности, они действуют, когда нильпотентная матрица является многочленом от  $B$ . Известно, что скалярные коэффициенты не зависят от линейного преобразования базиса и матрицы. Используя, например, клеточно-треугольную  $L_\mu$  или жорданову  $J$  каноническую форму, можно каждой произвольной квадратной матрице поставить во взаимно-однозначное соответствие пару характеристических матриц – простую и нильпотентную, коммутирующие между собой:

$$B = P_B + O_B \quad (B = T_1 \cdot L_\mu \cdot T_1^{-1} = T_2 \cdot J \cdot T_2^{-1}) \quad P_B \cdot O_B = O_B \cdot P_B \quad (23)$$

Матрицы  $B$  и  $P_B$  имеют одно и то же вековое уравнение, одинаковые собственные значения и их алгебраические кратности. Степень нильпотентности для  $O_B$  равна максимальной степени множителей в минимальном аннулирующем многочлене, или максимальному размеру жордановой субклетки.

Далее с учётом изначальной формулы (1) рассмотрим особенности и свойства матричных характеристических коэффициентов и их взаимосвязь со скалярными коэффициентами. Из (1) непосредственно вытекают тождественные ей формулы:

$$\begin{aligned} \det(B + \varepsilon I) \cdot I &= (B + \varepsilon I) \cdot (B + \varepsilon I)^V, \\ k_B(\varepsilon) \cdot I &= (B + \varepsilon I) \cdot K_B(\varepsilon), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sum_{t=0}^n \varepsilon^{(n-t)} [k(B,t) \cdot I - B \cdot K_1(B,t-1) - K_1(B,t)] = Z,$$

где  $Z$  – нулевая матрица.

Во-первых, отсюда следует, что в тождестве (24) возможна замена скалярного параметра  $\varepsilon$  на  $n \times n$ -матричный параметр  $E$ , коммутирующий с  $B$ . При этом тождество сохраняется:  $k_B(E) = (B + E) \cdot K_B(E)$ . При такой замене оба многочлена преобразуются в соответствующие матричные формы. В частности, при  $E = -B$  из последнего весьма просто выводится теорема Гамильтона – Кэли:  $k_B(-B) = Z$ ; но при  $E = +B$ :  $k_B(B) = 2B \cdot K_B(B)$  и т.д. Во-вторых, ввиду произвольности параметра  $\varepsilon$  отсюда же следует рекуррентная формула Сурье [61]:

$$K_1(B,t) = -B \cdot K_1(B,t-1) + k(B,t) \cdot I, \quad (25)$$

где исходно  $k(B,0) = 1$ ,  $K_1(B,0) = I$  – из (1). Пусть, по определению,  $K_1(B,t)$  и  $K_2(B,t) = B \cdot K_1(B,t-1)$  – характеристические матричные коэффициенты 1-го и 2-го рода. Для последних  $K_2(B,0) = Z$ ,  $K_2(B,1) = B$ . Учитывая это, (25) приводится к форме

$$K_1(B,t) + K_2(B,t) = k(B,t) \cdot I. \quad (26)$$

В результате последовательного повторения (25) и с учётом начальных условий матричные характеристические коэффициенты выражаются многочленами от  $B$ :

$$\left. \begin{array}{l} K_1(B,t) = \sum_{\theta=0}^t k(B,t-\theta) \cdot (-B)^\theta, \\ K_2(B,t) = - \sum_{\theta=1}^t k(B,t-\theta) \cdot (-B)^\theta. \end{array} \right\} \quad (27)$$

В силу этого они коммутативны с  $B$  и друг с другом. Из (27) с учётом (2), то есть метода Леверье, следует формула Сурье [61]:

$$k(B,t) = \frac{1}{n-t} \cdot \text{tr } K_1(B,t) = \frac{1}{t} \cdot \text{tr } K_2(B,t). \quad (28)$$

С целью вычисления  $B^{-1}$  Сурье предложил алгоритм последовательного расчёта всех характеристических коэффициентов, начиная с  $t = 1$ , используя (25) и (28), но в его статье, к сожалению, была опубликована только сводка результатов. Фаддеев [45], используя (1) и (2), пришёл независимо к тем же результатам и алгоритму, но при этом он связал эти коэффициенты с производящей их формулой (1). Из (27) и теоремы Гамильтона – Кэли следует  $K_1(B,n) = k_B(-B) = Z$ , а из (26) следует, что

$$K_2(B,n) = B \cdot K_1(B,n-1) = k(B,n) \cdot I = \det B \cdot I = B \cdot B^v.$$

Если матрица несингулярная, то, умножая обе части на  $B^{-1}$ , имеем:

$$B^{-1} = \frac{K_1(B,n-1)}{k(B,n)}$$

(алгоритмический метод Сурье – Фаддеева вычисления обратной матрицы). Объединяя установленные значения матричных коэффициентов, можно записать:

$$\left. \begin{array}{ll} K_1(B,0) = I, & K_2(B,0) = Z, \\ K_1(B,1) = \text{tr } B \cdot I - B, & K_2(B,1) = B, \\ \dots & \dots \\ K_1(B,n-1) = B^v, & K_2(B,n-1) = \text{tr } B^v \cdot I - B^v, \\ K_1(B,n) = Z, & K_2(B,n) = \det B \cdot I. \end{array} \right\} \quad (29)$$

Здесь предпоследняя строка верна, но получена пока для несингулярной матрицы. Логично далее определить порядок коэффициентов,

выше которого происходит обнуление цепи (29) или алгоритма Сурьё – Фаддеева. Из (26) и (28) для сингулярной матрицы следует, что матричные коэффициенты 1-го и 2-го рода обнуляются только вместе и окончательно. Это должно происходить при некотором порядке  $r'' \geq r'$ , где  $r'$  – максимальный порядок, при котором обнуляется скалярный коэффициент (ранее определённый как 1-й *рор* матрицы). Соответственно порядок обнуления матричных характеристических коэффициентов, а именно  $r''$ , определяется как 2-й *рор* сингулярной матрицы. (Для несингулярной матрицы эти понятия значения не имеют, оба рока формально равны размеру  $n$ .)

Неравенство  $r' \leq r$ , как известно, устанавливается только из структуры скалярных коэффициентов (сумма всех диагональных миноров порядка  $r$ ). Аналогично, положение 2-го рока относительно  $r'$  и  $r$  можно установить только исходя из структуры матричных коэффициентов и которую поэтому нужно найти. После этого можно будет установить взаимоотношение основных параметров сингулярности матрицы, включая показатель степени собственной матрицы в минимальном аннулирующем многочлене. Кроме того, искомая структура интересна ещё тем, что через коэффициенты высшего порядка весьма просто выражаются многие важнейшие матричные характеристики, например: проекторы, квазиобратные матрицы, модальные матрицы.

Для означенной цели воспользуемся *дифференциальным методом*. Причём для скалярных коэффициентов, чтобы показать аналогию в дальнейшем доказательстве для матричных коэффициентов, их вывод [14, с. 78] придётся повторить.

Пусть  $b_{i_1 j_1}, \dots, b_{i_m j_m}$  – произвольная совокупность  $m$  образующих элементов  $n \times n$ -матрицы  $B$  ( $1 \leq m \leq n$ ), то есть  $i_p \neq i_q$  и  $j_p \neq j_q$ . Коэффициент при произведении

$$\prod_{k=1}^m b_{i_k j_k}$$

в разложении детерминанта матрицы определяется формулой

$$\frac{\partial^m \det B}{\partial b_{i_1 j_1} \dots \partial b_{i_m j_m}} = (-1)^{\sum_{k=1}^m (i'_k + j'_k)} \cdot \det \left\{ \begin{array}{c} \text{lig } i_1, \dots, i_m \notin \\ \text{col } j_1, \dots, j_m \notin \\ \hline \text{minor } (n-m) \end{array} B \right\}, \quad (30)$$

где  $i'_k$  и  $j'_k$  – новые индексы элементов  $b_{i_k j_k}$  в ряду миноров, образуемых из матрицы последовательно при вычёркивании строк и столбцов элементов  $b_{i_1 j_1}, \dots, b_{i_m j_m}$ ; в фигурных скобках обозначен минор  $B$  порядка  $(n - m)$ , где дополнительно показано: какие строки и

столбцы он не содержит. Общая формула (30) получается в результате последовательного частного дифференцирования детерминанта матрицы. Далее вычисляем обратную матрицу в (1), то есть знаменатель и числитель дроби

$$(B + \varepsilon I)^{-1} = \frac{(B + \varepsilon I)^V}{\det(B + \varepsilon I)}.$$

Знаменатель дроби представляет собой скалярный многочлен от  $\varepsilon$  степени  $n$ . В силу (30) коэффициент при  $\prod_{k=1}^{n-t} (b_{i_k i_k} + \varepsilon)$  равен

$$\det \left\{ \frac{(i_1 i_1), \dots, (i_{n-t} i_{n-t}) \notin D\text{-minor}(t)}{D\text{-minor}(t)} (B + \varepsilon I) \right\}.$$

То есть это диагональный минор матрицы  $(B + \varepsilon I)$  порядка  $t$ , не содержащий указанных диагональных элементов. Поскольку только диагональные элементы содержат  $\varepsilon$ , то, полагая в этих детерминантах  $\varepsilon = 0$ , получаем коэффициенты при  $\varepsilon^{n-t}$  в данном скалярном многочлене как сумму всех диагональных миноров порядка  $t$ , причём  $K(B, 0) = 1$ .

Числитель вышеуказанной дроби представляет собой матрицу, у которой диагональные элементы – многочлены от  $\varepsilon$  степени  $(n-1)$ , а недиагональные элементы – многочлены от  $\varepsilon$  степени  $(n-2)$ . Эта матрица разлагается в многочлен от  $\varepsilon$  степени  $(n-1)$  с матричными коэффициентами

$$\sum_{t=0}^n K_1(B, t) \cdot \varepsilon^{n-t-1}, \quad \text{причём } K_1(B, 0) = I.$$

Элемент  $(pp)$  матрицы  $(B + \varepsilon I)^V$  равен

$$\frac{\partial \det(B + \varepsilon I)}{\partial (b_{pp} + \varepsilon)} = Ad_{pp}(B + \varepsilon I) = \det \left\{ \frac{(pp) \notin D\text{-minor}(n-1)}{D\text{-minor}(n-1)} (B + \varepsilon I) \right\},$$

где  $Ad_{pp}$  – адьюнкта элемента  $(pp) = (b_{pp} + \varepsilon)$ . По аналогии с вышеизложенным, коэффициент при  $\varepsilon^{n-t-1}$  в разложении этого детерминанта и он же – элемент  $(pp)$  матрицы  $K_1(B, t)$  равен

$$(pp) \{K_1(B, t)\} = \sum_{C_{n-1}^t} Ad_{p'p'} \left\{ \frac{(pp) \in D\text{-minor}(t+1)}{D\text{-minor}(t+1)} B \right\} = \sum_{C_{n-1}^t} \det \left\{ \frac{(pp) \notin D\text{-minor}(t)}{D\text{-minor}(t)} B \right\},$$

где  $p'$  – новые индексы строк и столбцов в минорах. В свою очередь, элемент  $(pq)$  матрицы  $(B + \varepsilon I)^V$  равен

$$\frac{\partial \det(B + \varepsilon I)}{\partial b_{qp}} = \text{Ad}_{qp}(B + \varepsilon I) = (-1)^{p+q} \cdot \det \left\{ \frac{(pq) \in}{\text{Dh-minor } (n-1)} (B + \varepsilon I) \right\},$$

где Dh-minor обозначает соответствующий *гиподиагональный* минор. То есть последний содержит один недиагональный образующий элемент, а именно  $b_{pq}$ , и соответственно не содержит элементов  $b_{qp}$ ,  $(b_{pp} + \varepsilon)$  и  $(b_{qq} + \varepsilon)$ . В силу (30) коэффициент при  $\prod_{k=1}^{n-t-1} (b_{i_k i_k} + \varepsilon)$  в разложении этого детерминанта (с учётом того, что порядок выполнения частного дифференцирования значения не имеет) равен

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n-t-1} \det \left\{ \frac{(pq) \in}{\text{Dh-minor } (n-1)} (B + \varepsilon I) \right\}}{\partial (b_{i_1 i_1} + \varepsilon) \dots \partial (b_{i_{n-t-1} i_{n-t-1}} + \varepsilon)} = \\ & = \frac{\partial \left[ \frac{\partial^{n-t-1} \det (B + \varepsilon I)}{\partial (b_{i_1 i_1} + \varepsilon) \dots \partial (b_{i_{n-t-1} i_{n-t-1}} + \varepsilon)} \right]}{\partial b_{qp}} = \\ & = \text{Ad}_{q'p'} \left\{ \frac{(i_1 i_1), \dots, (i_{n-t-1} i_{n-t-1}) \notin}{\text{D-minor } (t+1)} (B + \varepsilon I) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая  $\varepsilon = 0$ , получаем коэффициент при  $\varepsilon^{n-t-1}$ , или элемент  $(pq)$  матрицы  $K_1(B, t)$  как сумму всевозможных слагаемых

$$\begin{aligned} (pq)\{K_1(B, t)\} &= \sum_{C_{n-2}^{t-1}} \text{Ad}_{q'p'} \left\{ \frac{(pq) \in}{\text{D-minor } (t+1)} B \right\} = \\ &= \sum_{C_{n-2}^{t-1}} (-1)^{p''+q''+1} \cdot \det \left\{ \frac{(pq) \in}{\text{Dh-minor } (t)} B \right\}. \end{aligned}$$

Здесь индексы одного и того же элемента  $b_{pq}$  в диагональном миноре порядка  $(t+1)$  и в гиподиагональном миноре порядка  $t$  связаны между собой соотношением:  $p'+q'=p''+q''+1$ . Матричные коэффициенты 2-го рода легко выразить, используя (26). *Вывод структуры коэффициентов закончен.*

Итак, в сравнении со скалярными коэффициентами матричные коэффициенты в своей структуре дополнительно содержат гиподиагональные миноры и также не содержат прочих миноров (последние для исходной матрицы  $B$  существуют при ранге  $r < n - 1$ ). Это

обстоятельство и определяет местоположение 2-го рока относительно  $r'$  и  $r$ . А именно 2-й рок не может быть меньше 1-го рока в силу (28). Но он может быть больше его, в том числе на несколько единиц вплоть до величины ранга, для чего достаточно, чтобы имелся один ненулевой гиподиагональный минор порядка  $r'' > r'$ . Из структуры же видно, что 2-й рок не может быть больше ранга. Но он может быть меньше его (при условии  $r' < r$ ), в том числе на несколько единиц вплоть до 1-го рока, для чего достаточно, чтобы имелся один ненулевой прочий минор порядка  $r > r''$ .

*Следовательно, из структуры скалярных и матричных характеристических коэффициентов следует фундаментальное неравенство, связывающее основные параметры сингулярности матрицы:*

$$0 \leq r' \leq r'' \leq r \leq n . \quad (31)$$

Случай  $r' = 0$  соответствует нильпотентной матрице. В свою очередь, случай  $r'' = 0$  соответствует нулевой матрице. Если же она ненулевая, то  $r'' \geq 1$ , так как  $K_2(B,1) = B$ . Поэтому также  $r = 1 \leftrightarrow r'' = 1$ . Последний особый случай:  $r = n - 1 \leftrightarrow r'' = n - 1$ , так как  $K_1(B, n - 1) = B^v$  – присоединённая матрица, в которой фигурируют все миноры ранга  $(n - 1)$ . Найденная структура подтверждает (29), а также (28) и через (27) рекуррентную формулу Варинга – Леверье (2). Заметим, что именно порядок  $r''$  является границей для обрыва алгоритма Сурьё – Фаддеева. Второй рок (наряду с другими параметрами сингулярности) для исходной  $B$  и для любой её собственной  $B_i$  является инвариантом линейного преобразования и неотъемлемой характеристикой сингулярной матрицы.

## § 1.5. Минимальный аннулирующий многочлен от матрицы

Одним из приложений полученных выше результатов является установление точной формулы для минимального аннулирующего многочлена. Пусть  $\mu_1 = 0$  и  $\mu_i$  ( $i = \overline{1, q}$ ) – собственные значения некоторой сингулярной матрицы  $B$ ;  $s'_i = (n - r'_i)$  суть их алгебраические кратности (индекс 1 у параметров сингулярной матрицы  $B$  в дальнейшем опускается, чтобы отметить факт её сингулярности). Например, это может быть любая собственная матрица  $B_i$ . Согласно (27) и теореме Гамильтонса – Кэли с учётом разложения на простые множители, имеем:

$$\begin{aligned} K_1(B, n) &= \sum_{t=0}^n (-B)^{n-t} \cdot k(B, t) = (-B)^{s'_i} \cdot \sum_{t=0}^{r'_i} (-B)^{r'_i-t} \cdot k(B, t) = \\ &= (-B)^{s'_i} \cdot K_1(B, r') = (-B)^{s'_i} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s'_i} = Z . \end{aligned} \quad (32)$$

По сути это есть нулевой характеристический многочлен от матрицы  $B$ . С другой стороны, все характеристические коэффициенты порядка  $r'$  всегда ненулевые. Поэтому далее имеем:

$$\left. \begin{aligned} K_1(B, r') &= \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} \neq Z, \\ k(B, r') &= \prod_{i=2}^q \mu_i^{s_i'} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Из рекуррентной формулы Сурье (25) в интервале  $r' < t \leq r''$  следует справедливость соотношений:

$$K_1(B, t) = (-B)^{t-r'} \cdot K_1(B, r') = -K_2(B, t) \neq Z \quad (34)$$

(нильпотентные матричные коэффициенты).

Далее при превышении критического порядка на 1 имеем:

$$\begin{aligned} K_1(B, r'' + 1) &= (-B)^{r'' - r' + 1} \cdot K_1(B, r') = (-B)^{r'' - r' + 1} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} = \\ &= Z = (-B)^{r'' - r' + 1} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i^0} = (-B)^{s^0} \cdot \prod_{i=2}^q B_i^{s_i^0}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $s_i^0$  – кратность собственного значения  $\mu_i$  в минимальном аннулирующем многочлене, или его аннулирующая кратность. Но

$$(-B)^{r'' - r'} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i^0} \neq Z.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} s^0 &= r'' - r' + 1, \\ s_i^0 &= r_i'' - r_i' + 1. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Формулы (36) дают точные значения аннулирующих кратностей, то есть показателей степеней собственных матриц  $B_i = B - \mu_i I$  в минимальном аннулирующем многочлене от матрицы  $B$ . Эти кратности подчиняются классическому неравенству  $1 \leq s_i^0 \leq s_i'$  [30, с.124], так как  $r_i' \leq r_i''$  и имеет место (32). Подставляя в него значения из (36), получаем слабое неравенство  $r_i'' \leq n - 1$ . Следовательно, указанное классическое неравенство для сингулярной матрицы можно усилить сверху, а именно:

$$1 \leq s_i^0 \leq r_i - r_i' + 1 \leq s_i'. \quad (37)$$

Теперь видно, что если, наоборот, выразить неизвестный 2-й рок через известную аннулирующую кратность по (36), то тогда не получилось бы ограничения  $r'' \leq r$ . Поэтому 1-й и 2-й рок являются первичными понятиями для сингулярной матрицы, а аннулирующая кратность – вторичное понятие. Равенства сверху в (37) имеют место сначала при  $r'' = r_i$  и затем при  $r'' = n - 1 = r_i \geq r'_i$ . Далее рассмотрим: при каких условиях имеет место равенство в (37) снизу, или  $r'_i = r''_i$ . Для этого воспользуемся классическим неравенством Сильвестра [27, с.394]

$$\min(r_1, r_2) \geq \text{rang} \{C_2 \cdot C_1\} \geq r_1 + r_2 - n.$$

Для произведения нескольких матриц или для степени матрицы лучше перейти к сингулярностям вместо рангов. Тогда ограничение выражается лаконично с характеристиками, независящими от  $n$ :

$$\max(\text{sing } C_i) \leq \text{sing} \prod_{i=k}^1 C_i \begin{cases} \leq n, \\ \leq \sum_{i=1}^k \text{sing } C_i; \end{cases} \quad (38)$$

$$\text{sing } C \leq \text{sing } C^h \begin{cases} \leq n, \\ \leq h \cdot \text{sing } C, \end{cases} \quad (39)$$

где  $h$  – целое положительное число.

Благодаря применению сингулярностей вместо рангов непосредственно видно, что в правой нижней части (38) или (39) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$\langle \ker C_i \rangle \subset \langle \text{im} \prod_{j=i-1}^1 C_j \rangle, \quad i = \overline{2, k}.$$

В частности, для попарно коммутативных матриц это тождественно условию

$$\langle \ker B_i^{h_i} \rangle \cap \langle \ker B_j^{h_j} \rangle \equiv \langle 0 \rangle.$$

Тогда из (38) имеем:

$$n = \text{sing} \prod_{i=1}^q B_i^{h_i \geq s_i^0} = \sum_{i=1}^q \text{sing } B_i^{h_i \geq s_i^0}.$$

С другой стороны,  $\text{rang } B_i^h \geq r'_i$ , или  $\text{sing } B_i^h \leq s'_i$ , так как алгебраическая кратность и 1-й рок для степеней матрицы не изменяются. С учётом того, что  $\sum_{i=1}^q s'_i = n$ , отсюда следует

$$\left. \begin{array}{l} \text{sing } B_i^{h_i < s_i^0} < s_i', \\ \text{sing } B_i^{h_i \geq s_i^0} = s_i'. \end{array} \right\} \quad (40)$$

Тогда из (39) и (40) следуют частные неравенства

$$\left. \begin{array}{l} s_i^0 \cdot s_i' \geq s_i' \quad (s_i^0, s_i \leq s_i'), \\ s^0 \cdot s \geq s' \quad (s^0, s \leq s'). \end{array} \right\} \quad (41)$$

Набор значений сингулярностей или рангов степеней матрицы в (40), как известно [30, с.143], однозначно определяет набор жордановых субклеток в ультраинвариантной клетке размера  $s_i' \times s_i'$ , а критический показатель степени матрицы определяет размер максимальной жордановой субклетки  $s_i^0 \times s_i^0$ . Если  $s_i^0 = 1$ , или  $r_i' = r_i''$ , то из (41) вытекает  $s_i = s_i'$ . И наоборот  $s_i = s_i' \rightarrow r_i' = r_i'' = r_i$ . Следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} s_i^0 = 1 \leftrightarrow r_i' = r_i'' \leftrightarrow r_i' = r_i, \\ s^0 = 1 \leftrightarrow r' = r'' \leftrightarrow r' = r. \end{array} \right\} \quad (42)$$

Заметим, что известное классическое утверждение, получаемое из жордановой формы [30, с.143]:

$$"(s_i^0 = 1 \xrightarrow{i=1,q} s_i = s_i') \leftrightarrow B \in \langle P \rangle - \text{простая матрица}"$$

непосредственно следует из (42), но не детализировано, как здесь, по каждому собственному подпространству. Другой крайний случай, согласно (41), имеет вид:

$$s_i = 1 \leftrightarrow s_i^0 = s_i' \leftrightarrow r_i'' = n - 1 = r_i. \quad (43)$$

## § 1.6. Нуль-простые и нуль-дефектные сингулярные матрицы

Матрица, соответствующая  $r' = r$ , определяется здесь как **нуль-простая** и далее иногда обозначается как  $B_P$ . То есть она обладает свойствами простой матрицы на собственном подпространстве  $\langle \ker B_P \rangle \equiv \langle \ker B^h \rangle$ , соответствующем её нулевому собственному значению.

*Некоторая квадратная матрица является нуль-простой тогда и только тогда, когда справедливо любое из утверждений:*

- 1) 1-й рок равен 2-му року,
- 2) 1-й рок равен рангу,
- 3) ранг квадрата матрицы равен рангу матрицы,
- 4) пересечение ядра и образа матрицы есть нулевой элемент,
- 5) ядро и образ матрицы образуют прямую сумму.

Последнее свойство обуславливает существование для нуль-простой матрицы характеристических аффинных проекторов.

Матрица, для которой  $r' < r$ , определяется здесь как **нуль-дефектная**. Согласно (35), для неё существует характеристическая нильпотентная матрица

$$O_1 = \{K_i(B^{s^0}, r_B') / k(B^{s^0}, r_B')\} \cdot B; \quad O_1^{s^0} = Z, \quad (I \pm O_1)^{s^0} = I. \quad (44)$$

В свою очередь, нильпотентная матрица из (23) является суммой всех собственных матриц  $O_i$ , где  $i = 1, q$ . Для нильпотентной матрицы  $r' = 0$ ,  $r'' = s^0 - 1$ ;  $s^0$  – степень нильпотентности. Согласно (39), её ранг подчиняется неравенствам:

$$s^0 - 1 = r'' \leq \text{rang } O_1 \leq n \cdot [r'' / (r'' + 1)] = n \cdot [(s^0 - 1) / s^0] \leq n - 1, \quad (45)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \\ [n - s^0 \cdot (n - r)] \leq \end{array} \right\} \text{rang } O_1^h \leq r. \quad (46)$$

Из неравенства (37) следуют более точные оценки параметров сингулярности:

$$(n - 1) - (s_i' - s_i^0) \leq r_i \leq n - 1, \quad (47)$$

$$\left. \begin{array}{l} s_i \leq s_i' - (s_i^0 - 1), \\ s_i^0 \leq s_i' - (s_i - 1). \end{array} \right\} \quad (48)$$

Согласно жордановой форме [28, ч.2], параметр  $(s_i^0 - 1) = r_i'' - r_i'$  выражает максимальное количество единиц на прилегающей диагонали, идущих подряд в пределах  $i$ -й ультраинвариантной клетки. Общее число единиц выражает параметр  $(s_i' - s_i) = r_i - r_i'$ . Это трактует неравенства (47) и (48), а также 1-й и 2-й рок. В свою очередь, неравенство (41) тоже иллюстрируется жордановой формой. А именно удлинним на один нулевой элемент, например снизу, прилегающую диагональ  $i$ -й клетки. Получается квазидиагональ из  $s_i'$  элементов 0 или 1, выходящая за пределы клетки и оканчивающаяся нулём. При заданном  $s_i^0$  максимум общего количества единиц на квазидиагонали обеспечивает её равномерная разбивка на суботрезки длиной  $s_i^0$  с возможным остатком деления  $s_i'/s_i^0$ . Каждый из суботрезков состоит из единиц и

оканчивается нулём, в том числе неполный при остатке есть последний субтрезор. Поэтому  $\min(s_i) = [s_i'/s_i^0]$  – целая часть указанного отношения. Равенство в (41) возможно только при целом отношении. Из неравенств (41) следуют тождественные им неравенства:

$$(n - r_i) \cdot (r_i'' - r_i') \geq r_i - r_i', \quad (49)$$

$$r_i' + [(s_i' - s_i)/s_i] \leq r_i'' \leq (n - 1) - [(s_i' - s_i^0)/s_i^0]. \quad (50)$$

Поэтому (41), (49) и (50) эффективны для оценок только при  $r_i'' < r_i$ . При этом условии  $s_i < s_i' > s_i^0$ ,  $s_i' > 3$ ,  $s_i > 2$ ,  $s_i^0 > 1$ ,  $n > 3$ .

Определим параметр  $(r_i - r_i'')$  как *i-й дифферент* матрицы. Если  $r'' < r$ , то дефектная матрица – *нуль-дифферентная*. Из (49) следует, что максимальный дифферент как частный, так и общий составляет  $(\sqrt{n} - 1)^2 \leq n - 3$ , что достижимо, когда  $n$  есть квадрат целого числа. Максимум достигается при  $r = n - \sqrt{n}$ ,  $r'' = \sqrt{n} - 1$  и  $r' = 0$  ( $q = 1$ ). Согласно (49),  $B_i$  есть *нуль-индифферентная* матрица в частных случаях:

$$\left. \begin{array}{l} r_i = 1 \leftrightarrow r_i'' = 1, \\ r_i = 2 \leftrightarrow r_i'' = 2, \\ (n \leq 3 \text{ или } s_i' \leq 3). \end{array} \right\} \quad (51)$$

Откуда следует правило: *дифферент отсутствует, если размерность пространства или ультраинвариантного подпространства не более трёх*. Например, это правило может быть полезно при составлении минимального аннулирующего многочлена исходя из рангов. Согласно жордановой форме, оно означает, что в случае второго соотношения в (51) единицы на прилегающих диагоналях могут стоять только непрерывно.

*Некоторая квадратная матрица является нуль-индифферентной тогда и только тогда, когда ранги её степеней последовательно уменьшаются на 1 (вплоть до степени  $s^0$ ).*

### § 1.7. Характеристические коэффициенты в редуцированной форме

В заключение раздела вычислим все характеристические коэффициенты матрицы в редуцированной форме. Под редукцией здесь понимается максимально возможное понижение степеней характеристических многочленов от  $\varepsilon$  в числителе и знаменателе дроби (1) за счёт сокращения их общего делителя. Известен метод вычисления минимального аннулирующего многочлена матрицы  $B$

через наибольший общий делитель элементов матрицы  $(B + \varepsilon I)^v = (B - \mu I)^v$  [30, с. 123]. Нетрудно видеть, что последний сокращается в дроби (1) у числителя и у знаменателя. Вследствие этого претерпевают редукцию как многочлен Гамильтона – Кэли, так и характеристические коэффициенты, формулы их связи и алгоритм Сурье – Фаддеева. Применение редукции к (24) даёт соотношение

$$\mathcal{Q}_B(\varepsilon) \cdot I = (B + \varepsilon I) \cdot Q_B(\varepsilon). \quad (52)$$

Здесь

$$\mathcal{Q}_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n^0} \mathcal{Q}(B, t) \cdot \varepsilon^{n^0 - t},$$

$$Q_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n^0-1} Q_1(B, t) \cdot \varepsilon^{n^0 - t - 1},$$

где  $n^0$  – порядок минимального многочлена. Аналогично (24), формула (52) справедлива и для матричного параметра Е. В частности, при  $E = -B$  отсюда следует минимальный аннулирующий многочлен как в скалярной, так и матричной форме (редуцированная теорема Гамильтона – Кэли), а также следует редуцированная теорема Виета для скалярных коэффициентов:

$$\mathcal{Q}_B(-B) = Q_1(B, n^0) = \sum_{t=0}^{n^0} (-B)^{n^0 - t} \cdot \mathcal{Q}(B, t) = \prod_{i=1}^q (\mu_i - B)^{s_i^0} = Z, \quad (53)$$

$$\mathcal{Q}_B(-\mu) = \sum_{t=0}^{n^0} (-\mu)^{n^0 - t} \cdot \mathcal{Q}(B, t) = \prod_{i=1}^q (\mu_i - \mu)^{s_i^0}, \quad (54)$$

$$\mathcal{Q}(B, t) = \sum_{C_{n^0}^t} \prod_{(t)} \mu_i \quad (q \leq n^0 = \sum_{i=1}^q s_i^0 \leq n). \quad (55)$$

Соответственно редуцируются (25) – (29). В редуцированном алгоритме Сурье – Фаддеева начальные условия те же, но далее используется редуцированный след и т.д.:

$$Q_1(B, 0) = I, \quad Q_2(B, 0) = Z, \quad Q_2(B, 1) = B; \quad \mathcal{Q}(B, 1) = \sum_{n^0} \mu_i.$$

Редуцированный детерминант есть  $\mathcal{Q}(B, n^0) = \prod_{i=1}^q \mu_i^{s_i^0}$ . Обратная несингuliarная матрица есть

$$B^{-1} = Q_1(B, n^0 - 1) / \mathcal{Q}(B, n^0).$$

Интересно, что как бы эффективное количество собственных значений при этом снижается до  $n^0$ , а размер матрицы остаётся прежним.

Высшие коэффициенты собственных матриц в редуцированной форме выражаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(B_i, r_i^0) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - B)^{s_j^0}, \\ Q(B_i, r_i^0) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j - \mu_i)^{s_j^0}, \quad j \neq i, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где  $r_i^0 = (n^0 - s_i^0)$  – редуцированный 1-й рок. Причём 2-й рок вследствие редукции формально равен  $(n^0 - 1)$ . Частная редукция составляет  $[(n - 1) - r_i'']$ ; общая редукция равна  $(n - n^0)$ . Сумма основных частных параметров укладывается в неравенство

$$(n \cdot q - 1) = \sum_{i=1}^q r_i' \leq \sum_{i=1}^q r_i'' \leq \sum_{i=1}^q r_i \leq (n \cdot q - q).$$

Для простой матрицы:  $n^0 = q$ ,  $s_i^0 = 1$ ,  $Q(P^h, 1) = \sum_{i=1}^q \mu_i^h$ ,  $Q(P^h, q) = Q^h(P, q)$ .

Для её же собственных матриц:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(P_i, q - 1) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - P), \\ Q(P_i, q - 1) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j - \mu_i), \quad j \neq i. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

В свою очередь, для генерального спектрального представления матрицы общего вида интересны ещё три типа аннулирующих многочленов (кроме минимального), а именно в порядке повышения их степени:

$$\prod_{j=1}^q (\mu_j^{\max s_j^0} \cdot I - B^{\max s_j^0}) = Z, \quad (58)$$

$$\prod_{j=1}^q [\mu_j^{\max (r_i - r_i' + 1)} \cdot I - B^{\max (r_i - r_i' + 1)}] = Z, \quad (59)$$

$$\prod_{j=1}^q (\mu_j^{\max s_j'} \cdot I - B^{\max s_j'}) = Z. \quad (60)$$

В этих формулах все три типа степени В являются простыми матрицами. Редуцированные коэффициенты высшего порядка для этих степенных матриц определяют формулы (57).

Конечно, вышеуказанное представление основных характеристических матриц в редуцированной форме имеет, прежде всего, теоретическое значение. В какой-то мере оно переносит методы теории чисел на теорию точных матриц.

В практическом же плане несравненно более важное значение имеет корректное определение *основных* параметров сингулярности точной матрицы, что непосредственно связано со структурой её характеристических коэффициентов – скалярных и матричных.

Таким образом, в данной начальной главе была полностью идентифицирована структура всех характеристических коэффициентов квадратной матрицы, в том числе коэффициентов высшего порядка для сингулярной матрицы. (Напомним, что к множеству последних принадлежат все собственные матрицы  $B_i$ .) Это, в частности, позволило установить взаимоотношения между основными параметрами сингулярности, которые имеют особое значение в развивающейся далее тензорной тригонометрии. В свою очередь, через характеристические коэффициенты высшего порядка непосредственно в явном виде выражаются собственные проекторы сингулярных матриц, а также конструируются модальные матрицы для приведения к основной и другим каноническим формам.

## Глава 2. Собственные аффинные и ортогональные проекторы

### § 2.1. Аффинные проекторы и квазиобратная матрица во взаимосвязи с коэффициентами высшего порядка

Пусть  $B_p$  есть нуль-простая матрица. Тогда  $k(B_p, r) \neq 0$ , где порядок коэффициента  $r = \text{rang } B_p$ . Формула (26) приводится к виду:

$$\{K_1(B_p, r)/k(B_p, r)\} + \{K_2(B_p, r)/k(B_p, r)\} = \overrightarrow{B_p} + \overleftarrow{B_p} = I.$$

Здесь и далее  $\overrightarrow{B_p}$  и  $\overleftarrow{B_p}$  обозначают собственные характеристические *аффинные* проекторы для  $B_p$  и вместе с тем – идемпотентные матрицы. В случае пространства с евклидовой метрикой это также суть собственные характеристические *косоугольные* проекторы. В аффинном пространстве  $\overrightarrow{B_p}$  проецирует на ядро  $\langle \ker B_p \rangle$  параллельно образу  $\langle \text{im } B_p \rangle$ , а  $\overleftarrow{B_p}$  проецирует на образ  $\langle \text{im } B_p \rangle$  параллельно ядру  $\langle \ker B_p \rangle$ . Действительно,

$$K_2(B_p, r) = B_p \cdot K_1(B_p, r - 1) = K_1(B_p, r - 1) \cdot B_p;$$

$$\overrightarrow{B_p} + \overleftarrow{B_p} = I, \quad \overrightarrow{B_p} \cdot \overleftarrow{B_p} = \overleftarrow{B_p} \cdot \overrightarrow{B_p} = Z;$$

$$(\overrightarrow{B_p})^2 = \overrightarrow{B_p} \cdot (I - \overleftarrow{B_p}) = \overrightarrow{B_p}, \quad (\overleftarrow{B_p})^2 = \overleftarrow{B_p} \cdot (I - \overrightarrow{B_p}) = \overleftarrow{B_p};$$

$$\langle \ker B_p \rangle \oplus \langle \text{im } B_p \rangle \equiv \langle A^n \rangle, \quad x = \overrightarrow{B_p}x + \overleftarrow{B_p}x = \overrightarrow{x} + \overleftarrow{x}.$$

Отсюда видно, что произвольный элемент  $x$  однозначно разлагается на проекции  $\overrightarrow{x}$  (на  $\langle \ker B_p \rangle$  параллельно  $\langle \text{im } B_p \rangle$ ) и  $\overleftarrow{x}$  (на  $\langle \text{im } B_p \rangle$  параллельно  $\langle \ker B_p \rangle$ ). Итак,

$$\overrightarrow{B_p} = K_1(B_p, r)/k(B_p, r), \tag{61}$$

$$\overleftarrow{B_p} = K_2(B_p, r)/k(B_p, r) = B_p \cdot K_1(B_p, r - 1)/k(B_p, r) = K_1(B_p, r - 1) \cdot B_p / k(B_p, r). \tag{62}$$

Для некоторых частных случаев имеем:  $\vec{a} = 0, \vec{\bar{a}} = 1$  (где  $a$  – скаляр);  $Z = I, \bar{I} = Z$ ;

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } K_1(Bp, r) \rangle &\equiv \langle \ker K_2(Bp, r) \rangle \equiv \langle \ker Bp \rangle, \\ \langle \ker K_1(Bp, r) \rangle &\equiv \langle \text{im } K_2(Bp, r) \rangle \equiv \langle \text{im } Bp \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rang } K_1(Bp, r) &= \text{sing } Bp, \\ \text{rang } K_2(Bp, r) &= \text{rang } Bp; \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$\overrightarrow{(Bp')} = (\overleftarrow{Bp})', \quad \overleftarrow{(Bp')} = (\overrightarrow{Bp})', \quad (\overrightarrow{Bp}) = (\overleftarrow{Bp}) = \overleftarrow{Bp}, \quad (\overleftarrow{Bp}) = (\overrightarrow{Bp}) = \overrightarrow{Bp}; \quad (65)$$

$$k(\overrightarrow{B}, t) = C_{n-r}^t, \quad k(\overleftarrow{B}, t) = C_r^t. \quad (66)$$

Для степени сингулярной матрицы получаем обобщения:

$$k(B^h, r') = k^h(B, r'), \quad (67)$$

$$K_{1,2}(Bp^h, r) = K_{1,2}^h(Bp, r) = k^{h-1}(Bp, r) \cdot K_{1,2}(Bp, r). \quad (68)$$

В аффинном пространстве определяется собственная аффинная квази обратная матрица, коммутирующая с исходной матрицей:

$$\begin{aligned} Bp^- &= \overleftarrow{Bp} \cdot [K_1(Bp, r-1) / k(Bp, r)] = [K_1(Bp, r-1) / k(Bp, r)] \cdot \overleftarrow{Bp} = \\ &= Bp \cdot [K_1(Bp, r-1) / k(Bp, r)]^2 = [K_1(Bp, r-1) / k(Bp, r)]^2 \cdot Bp. \end{aligned} \quad (69)$$

Она играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } Bp \rangle$  и нулевой – на  $\langle \ker Bp \rangle$  и определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} Bp^- \cdot Bp &= Bp \cdot Bp^- = \overleftarrow{Bp}, \\ Bp^- &= \overleftarrow{Bp} \cdot Bp^- = Bp^- \cdot \overleftarrow{Bp}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Для неё же справедливы соотношения:  $\text{rang } Bp^- = \text{rang } Bp$ ;

$$\langle \text{im } Bp^- \rangle \equiv \langle \text{im } Bp \rangle, \quad \langle \ker Bp^- \rangle \equiv \langle \ker Bp \rangle; \quad B^- = B^{-1} \leftrightarrow \det B \neq 0;$$

$$Bp \cdot Bp^- \cdot Bp = Bp, \quad Bp^- \cdot Bp \cdot Bp^- = Bp^-;$$

$$(Bp^-)^- = Bp, \quad (Bp^h)^- = (Bp^-)^h, \quad (Bp')^- = (Bp^-)'.$$

Согласно (1), (61), (62) и (69), аффинные проекторы и квазиобратная матрица представляются пределами:

$$\overrightarrow{Bp} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \cdot (Bp + \varepsilon \cdot I)^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} (N \cdot Bp + I)^{-1}, \quad (71)$$

$$\overleftarrow{Bp} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [Bp \cdot (Bp + \varepsilon \cdot I)^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot Bp \cdot (N \cdot Bp + I)^{-1}], \quad (72)$$

$$Bp^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [Bp \cdot (Bp + \varepsilon \cdot I)^{-2}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [N^2 \cdot Bp \cdot (N \cdot Bp + I)^{-2}] \quad (73)$$

$$(\overrightarrow{Bp} + \overleftarrow{Bp}) = I, \quad Bp^- \cdot Bp = Bp \cdot Bp^- = \overleftarrow{Bp}; \quad N = 1/\varepsilon.$$

Тривиальными частными случаями нуль-простых матриц  $Bp$  являются собственные простые матрицы  $P_i = P - \mu_i \cdot I$ ,  $P_1 = P$  ( $\mu_1 = 0$ ), в том числе собственные нормальные и симметричные матрицы, степенные матрицы вида  $B^{h \geq s_i^0}$ ,  $B_i^{h \geq s_i^0}$ .

## § 2.2. Применение результатов в спектральном представлении матрицы и для её приведения к основной канонической форме

Характеристические аффинные проекторы для собственных ультраинвариантных подпространств, образующих всегда прямую сумму, можно вычислить исходя из (57) для простой матрицы  $P$  [30, с. 156] и исходя из (58)–(60) для дефектной матрицы  $B$  [10]:

$$\overrightarrow{P_i} = \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - P) / (\mu_j - \mu_i), \quad (74)$$

$$\overrightarrow{Bp_{(i)}} = \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - B)^{s_j^0} / (\mu_j - \mu_i)^{s_j^0} = \prod_{j=1}^q (\mu_j^{h'} \cdot I - B^{h'}) / (\mu_j^{h'} - \mu_i^{h'}) = \overrightarrow{(B^h)_i}, \quad (75)$$

где ( $j \neq i$ ),  $h' \geq \max s_i^0$ ;  $Bp_{(i)} = B_i^{s_i^0}$ . Спектральное представление матрицы  $B$  с точностью до ультраинвариантных подпространств даёт одновременно её разложение на характеристические простую и нильпотентную матрицы. Такое разложение, согласно (23), интерпретируется жордановой формой и выражается формулой:

$$B = B \cdot \sum_{i=1}^q \overrightarrow{B p_{(i)}} = \sum_{i=1}^q \mu_i \cdot \overrightarrow{B p_{(i)}} + \sum_{i=1}^q B_i \cdot \overrightarrow{B p_{(i)}} = \sum_{i=1}^q P_i + \sum_{i=1}^q O_i = P_B + O_B \quad (76)$$

$$(P_B^{h'} = B^{h'}, O_B^{h'} = Z).$$

Для составления модальной матрицы преобразования  $B$  к *основной* (диагонально-клеточной) канонической форме могут использоваться коэффициенты вида:

$$K_1(B_i, r_i') = \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - B)^{s_j'}, \text{ согласно (33),}$$

$$Q_1(B_i, r_i^0) = \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - B)^{s_j^0}, \text{ согласно (56),}$$

$$Q_1[(B^{h'})_i, q-1] = \prod_{j=1}^q (\mu_j^{h'} \cdot I - B^{h'})^{s_j^0}, \text{ согласно (58)-(69), } (j \neq i).$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } K_1(B_i, r_i') \rangle &\equiv \langle \text{im } Q_1(B_i, r_i^0) \rangle \equiv \langle \text{im } Q_1[(B^{h'})_i, q-1] \rangle \equiv \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle, \\ \langle \ker K_1(B_i, r_i') \rangle &\equiv \langle \ker Q_1(B_i, r_i^0) \rangle \equiv \langle \ker Q_1[(B^{h'})_i, q-1] \rangle \equiv \langle \text{im } B_i^{s_i^0} \rangle. \end{aligned} \right\} (77)$$

Все эти коэффициенты являются нуль-простыми матрицами. Но высшие скалярные коэффициенты последних – ненулевые. Поэтому такие матрицы обязательно имеют базисный диагональный минор, на перекрёстке которого расположены базисная  $r_i' \times n$ -субматрица строк и базисная  $n \times r_i'$ -субматрица столбцов. Соответственно из субматриц столбцов составляется ковариантная, а из субматриц строк – контравариантная модальные матрицы:

$$V_{\text{col}}^{-1} \cdot B \cdot V_{\text{col}} = C_\mu, \quad \tilde{E}_1 = V_{\text{col}} \cdot \tilde{E}, \quad (78)$$

$$V_{\text{lig}} \cdot B \cdot V_{\text{lig}}^{-1} = C_\mu, \quad \tilde{E}_2 = V_{\text{lig}}^{-1} \cdot \tilde{E}, \quad (79)$$

$$V'_{\text{lig}}^{-1} \cdot B' \cdot V'_{\text{lig}} = C'_\mu, \quad \tilde{E}_3 = V'_{\text{lig}} \cdot \tilde{E}, \quad (80)$$

$$V'^*_{\text{lig}} \cdot B^* \cdot V'^*_{\text{lig}} = C'^*_\mu, \quad \tilde{E}_4 = V'^*_{\text{lig}} \cdot \tilde{E}, \quad (81)$$

где  $C_\mu$  обозначает каноническую клеточную форму матрицы  $B$  в последовательности собственных значений  $\mu_1, \dots, \mu_q$ ;  $\tilde{E}$  и  $\tilde{E}_k$  – матрицы вектор-столбцов исходного базиса и базиса канонической формы. Кроме того, каждое ультраинвариантное подпространство содержит, как известно, неинвариантные подпространства:

$$\left. \begin{array}{l} \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle \supset \langle \text{im } O_i^1 \rangle \supset \dots \supset \langle \text{im } O_i^{s_i^0 - 1} \rangle, \\ \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle \supset \langle \ker O_i^{s_i^0 - 1} \rangle \supset \dots \supset \langle \ker O_i^1 \rangle; \end{array} \right\} \quad (82)$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \text{im } O_i^t \rangle \equiv \langle \text{im } K_1(B_i, r_i') \cdot B_i^t \rangle \equiv \langle \text{im } Q_1(B_i, r_i^0) \cdot B_i^t \rangle, \\ \langle \ker O_i^t \rangle \equiv \langle \text{im } B_i^t \rangle \quad (t = 1, \dots, s_i^0 - 1). \end{array} \right\} \quad (83)$$

Если из проекции в ультраинвариантной клетке вычесть простую диагональную часть, то остаётся нильпотентная клетка, которая может далее подвергаться модальному преобразованию вплоть до нильпотентной жордановой формы.

Модальная матрица, составленная в (78) – (81), получена, в принципе, для простой матрицы  $P_B = \sum_{j=1}^q P_j$ . Поэтому общая форма ковариантной модальной матрицы имеет вид:

$$\langle V_{\text{col}} \rangle \equiv V_{\text{col}} \cdot \langle C_q \rangle \quad (V_{\text{lig}}^{-1} \in \langle V_{\text{col}} \rangle), \quad (84)$$

где  $C_q$  – клеточная произвольная несингулярная матрица, состоящая из несингулярных блоков  $c_1, \dots, c_q$ . Количество нильпотентных жордановых субклеток размера  $t \times t$  в  $i$ -й клетке основной формы с учётом известной формулы [например, 28, ч.2, с.95] определится как

$$[(\text{rang } O_i^t - \text{rang } O_i^{t+1}) - (\text{rang } O_i^{t+1} - \text{rang } O_i^{t+2})].$$

Для генерального спектрального представления матрицы  $B$  и её аналитических функций используют интерполяционный многочлен Лагранжа, который даёт компонентные матрицы [30, с. 158]:

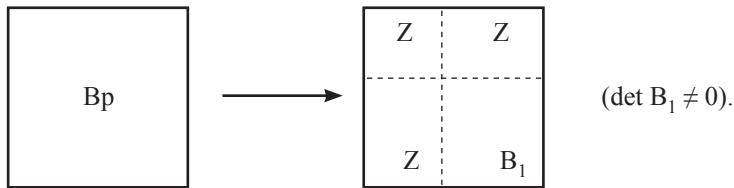
$$B_{(ik)} = [B_i^{k-1}/(k-1)!] \cdot \overrightarrow{Bp}_{(i)} \quad (\langle \text{im } B_{(ik)} \rangle \equiv \langle \text{im } O_i^{k-1} \rangle) \quad (85)$$

$$(k = 1, \dots, s_i^0).$$

Подставим сюда ранее полученное выражение (75) для фигурирующего здесь аффинного проектора. В результате итоговая формула для интерполяционного многочлена Лагранжа приобретает вполне завершённый вид, определяемый только самой исходной квадратной матрицей.

### § 2.3. Приведение нуль-простой матрицы к нуль-клеточной форме

Нуль-простая матрица приводится модальным преобразованием к нижеуказанной *нуль-клеточной форме*  $B_C$ :



Обратим внимание на то, что высшие матричные коэффициенты  $K_1(B_p, r)$  и  $K_2(B_p, r)$  как нуль-простые матрицы обязательно содержат базисные диагональные миноры. Они определяют две базисные  $n \times s$ -и  $n \times r$ -субматрицы столбцов. Из последних составляется ковариантная модальная матрица для преобразования базиса:

$$\begin{aligned} V_{\text{col}}^{-1} \cdot B_p \cdot V_{\text{col}} &= B_C \\ (\tilde{E}_1 = V_{\text{col}} \cdot \tilde{E}, \quad \langle V_{\text{col}} \rangle \equiv V_{\text{col}} \cdot C_2). \end{aligned} \tag{86}$$

Заметим, что вместо вышеуказанного коэффициента 2-го рода может использоваться непосредственно исходная матрица  $B_p$ , так как их образы тождественные. Пусть дана пара нуль-простых матриц  $B_p$  одинакового размера, для которых выполняется одновременно два условия:

$$\begin{aligned} \langle \text{im } B_{p_1} \rangle &\equiv \langle \text{im } B_{p_2} \rangle, \quad \langle \text{im } B_{p_1}' \rangle \equiv \langle \text{im } B_{p_2}' \rangle \\ (\overrightarrow{B_{p_1}} = \overrightarrow{B_{p_2}}, \quad \overleftarrow{B_{p_1}} = \overleftarrow{B_{p_2}}). \end{aligned}$$

Тогда с учётом (86) для них следуют соотношения:

$$\begin{aligned} K_{1,2}(B_{p_1} \cdot B_{p_2}, r) &= K_{1,2}(B_{p_2} \cdot B_{p_1}, r) = K_{1,2}(B_{p_1}, r) \cdot K_{1,2}(B_{p_2}, r), \\ k(B_{p_1} \cdot B_{p_2}, r) &= k(B_{p_2} \cdot B_{p_1}, r) = k(B_{p_1}, r) \cdot k(B_{p_2}, r). \end{aligned} \tag{87}$$

В частности, последнее из них обобщает классическую формулу для детерминанта произведения матриц:  $\det(B_1 \cdot B_2) = \det(B_2 \cdot B_1) = \det B_1 \cdot \det B_2$ .

### § 2.4. Нуль-нормальные сингулярные матрицы

Рассмотренные выше проекторы  $\overrightarrow{B_r}$  и  $\overleftarrow{B_r}$  взаимно-однозначно связаны с парой линейных подпространств  $\langle \text{im } B_r \rangle$  и  $\langle \ker B_r \rangle$  в аффинном пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  с некоторым линейным базисом. Пусть это есть *вещественное* пространство. Выделим множество вещественных нуль-простых матриц  $\langle B_m \rangle$ , для которых имеют место соотношения:

$$\overrightarrow{B_m} = \overrightarrow{B_m}' = (\overrightarrow{B_m})' \leftrightarrow \overleftarrow{B_m} = \overleftarrow{B_m}' = (\overleftarrow{B_m})'. \quad (88)$$

Геометрически данное условие выражается так

$$\langle \ker B_m \rangle \equiv \langle \ker B_m' \rangle \leftrightarrow \langle \text{im } B_m \rangle \equiv \langle \text{im } B_m' \rangle. \quad (89)$$

При этом  $\langle \text{im } B_m \rangle$  и  $\langle \ker B_m \rangle$  образуют в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  прямую сумму, так как  $k(B_m, r) \neq 0$ . В евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  проявляется геометрическая исключительность этих матриц, причём при использовании ортонормированного базиса:

$$\begin{aligned} \langle \ker B_m' \rangle &\equiv \langle \text{im } B_m \rangle^\perp \equiv \langle \ker B_m \rangle, \\ \langle \text{im } B_m' \rangle &\equiv \langle \ker B_m \rangle^\perp \equiv \langle \text{im } B_m \rangle. \end{aligned} \quad (90)$$

*То есть матрица, заданная в ортонормированном базисе в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , имеет симметричные характеристические проекторы тогда и только тогда, когда подпространства  $\langle \text{im } B_m \rangle$  и  $\langle \ker B_m \rangle$  образуют прямую ортогональную сумму.*

Матрица  $B_m$  обладает свойствами нормальной матрицы на собственном подпространстве, соответствующем нулевому собственному значению. Поэтому она определяется как *нуль-нормальная*, а её проекторы – как ортогональные. В частности, это суть сингулярные нормальные, в том числе симметричные и кососимметричные матрицы, а также несингулярные матрицы. Имеют место соотношения:

$$\overrightarrow{B_m} = \overrightarrow{B_m}' = K_1(B_m, r)/k(B_m, r) \leftrightarrow K_1(B_m, r) = K_1'(B_m, r) \quad (91)$$

$$\overleftarrow{B_m} = \overleftarrow{B_m}' = K_2(B_m, r)/k(B_m, r) \leftrightarrow K_2(B_m, r) = K_2'(B_m, r). \quad (92)$$

Проектор  $\overrightarrow{B_m}$  проецирует в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  ортогонально на ядро матрицы  $B_m$ , а проектор  $\overleftarrow{B_m}$  проецирует ортогонально на её образ:  $\overrightarrow{B_m} \perp \overleftarrow{B_m}$ .

Очевидно, что все собственные матрицы  $B_i$  нуль-простые и вещественные, или все они имеют вещественные аффинные проекторы  $\overleftarrow{B}_i$  и  $\overrightarrow{B}_i$  тогда и только тогда, когда  $B$  простая вещественная матрица с вещественной диагональной формой (собственными значениями). В свою очередь, для нормальной вещественной матрицы  $B = M$  существует ортогональная вещественная модальная матрица  $R$  её приведения к вещественной диагональной форме тогда и только тогда, когда она симметрична:  $M = S$ . Образ и ядро всех собственных матриц  $S_i$  ортогонально дополняют друг друга в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ .

*Следовательно, некоторая вещественная матрица имеет все нуль-нормальные вещественные собственные матрицы тогда и только тогда, когда она симметрична.*

В частном же случае собственные матрицы  $B_i$  и  $B'_i$  ранга  $(n - 1)$  имеют один и тот же  $i$ -й собственный вектор тогда и только тогда, когда  $B_i^v = (B'_i)^v$ . При этом ортонормирование столбцов по Граму – Шмидту отдельно в 2-х блоках модальной матрицы  $V_{\text{col}} = V_{\text{lig}}'$  в (86) даёт ортогональную модальную матрицу приведения к канонической нуль-клеточной форме:

$$R_{\text{col}}' \cdot Bm \cdot R_{\text{col}} = Bc \quad (93)$$

$$(\langle R_{\text{col}} \rangle \equiv R_{\text{col}} \cdot \langle R_2 \rangle, \quad \langle V_{\text{col}} \rangle \equiv R_{\text{col}} \cdot \langle C_2 \rangle).$$

Если исходный базис был декартов, например  $\{I\}$ , то новый ортонормированный базис будет выражаться в нём вектор-столбцами модальной матрицы  $\{R_{\text{col}}\} = \{R_{\text{lig}}'\}$ . Ориентация базиса сохраняется или выбирается путём умножения  $R_{\text{col}}$  справа на знакопеременную единичную матрицу. В частности, к нуль-нормальным матрицам при надлежат сингулярные  $M$  и  $S$ .

Аналогично (78), для симметричной матрицы  $S$  можно полностью сформировать ортогональную модальную матрицу  $R_{\text{col}}$  её приведения к диагональной форме. Если собственные значения матрицы  $S$  различны, то находимые через  $\langle \ker S_i \rangle$  все  $n$  её единичных собственных векторов сразу же дают искомую  $R_{\text{col}}$ . Если же некоторые из них вырождены (при  $S_i > 1$ ), то прибегают к ортонормированию по Граму – Шмидту.

Приведём встречаемый во втором разделе основной части монографии характерный пример нуль-нормальных матриц, образуемых из прямоугольной  $n \times m$ -матрицы  $A$ :

$$Bm_1 = A_1 \cdot A_2', \quad Bm_1' = A_2 \cdot A_1' \quad (94)$$

$$(\text{im } A_1 \equiv \text{im } A_2, \quad \text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = m < n),$$

$$\overrightarrow{Bm_2} = A_1 \cdot \overrightarrow{A_2}, \quad \overrightarrow{Bm_2'} = A_2 \cdot \overrightarrow{A_1} \quad (95)$$

$\langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle, \quad \text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = n < m.$

Укажем некоторые другие свойства изучаемых нуль-нормальных матриц:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{(Bm' \cdot Bm)} = \overrightarrow{(Bm \cdot Bm')} = \overrightarrow{Bm}, \\ \overleftarrow{(Bm' \cdot Bm)} = \overleftarrow{(Bm \cdot Bm')} = \overleftarrow{Bm}; \\ \langle \ker Bm' \cdot Bm \rangle \equiv \langle \ker Bm \cdot Bm' \rangle \equiv \langle \ker Bm \rangle, \\ \langle \text{im } Bm' \cdot Bm \rangle \equiv \langle \text{im } Bm \cdot Bm' \rangle \equiv \langle \text{im } Bm \rangle. \end{array} \right\} \quad (96)$$

Нуль-нормальные матрицы  $Bm$  и  $Bm'$  удовлетворяют двум условиям формулы (87). Поэтому для них также справедливы формулы расщепления:

$$\left. \begin{array}{l} K_{1,2}(Bm \cdot Bm', r) = K_{1,2}(Bm' \cdot Bm, r) = K_{1,2}^2(Bm, r), \\ k(Bm \cdot Bm', r) = k(Bm' \cdot Bm, r) = k^2(Bm, r). \end{array} \right\} \quad (97)$$

В частности, последняя из них обобщает классическую формулу для детерминанта гомомультиPLICATIONИ матрицы:

$$\det(B \cdot B') = \det(B' \cdot B) = \det^2 B.$$

## § 2.5. Сферически ортогональные проекторы и квазиобратная матрица

Пусть  $A - n \times m$ -матрица,  $r = \text{rang } A$ . Тогда  $AA'$  и  $A'A \in \langle Bm \rangle$ . Согласно (91) и (92),

$$\overrightarrow{AA'} = K_1(AA', r) / k(AA', r), \quad \overrightarrow{A'A} = K_1(A'A, r) / k(A'A, r). \quad (98)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{AA'} = K_2(AA', r) / k(AA', r) = A \cdot A^+, \\ \overleftarrow{A'A} = K_2(A'A, r) / k(A'A, r) = A^+ \cdot A, \end{array} \right\} \quad \{k(AA', t) = k(A'A, t)\} \quad (99)$$

где  $\overrightarrow{AA'}$  проецирует ортогонально на  $\langle \ker A' \rangle$ ,  $\overrightarrow{aa'} = I - aa'/a'a$ ;

$\overleftarrow{AA'}$  проецирует ортогонально на  $\langle \text{im } A \rangle$ ,  $\overleftarrow{aa'} = a \cdot a'/a'a$ ;

$A^+$  – квазиобратная  $m \times n$ -матрица Мура – Пенроуза [18, 59, 60], для которой  $\text{rang } A^+ = \text{rang } A'$ . Согласно (99), она удовлетворяет условию:

$$\overleftarrow{A'A} \cdot A^+ = A^+ \cdot \overleftarrow{AA'}. \quad (100)$$

Отсюда следует формула Диселла

$$A^+ = A' \cdot K_1(AA', r - 1) / k(AA', r) = [K_1(A'A, r - 1) / k(A'A, r)] \cdot A', \quad (101)$$

полученная им ранее через алгоритм Сурьё – Фаддеева [52]. Если матричный коэффициент развернуть в многочлен (27), то непосредственно видна тождественность обеих частей этой формулы. В частности,  $\langle \mathbf{a} \rangle^+ = \mathbf{a}' / \mathbf{a}' \mathbf{a}$ . Квазиобратная матрица Мура – Пенроуза играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } A' \rangle$  и нулевой на  $\langle \ker A' \rangle$  при умножении слева:

$$A^+ \cdot C = A^+ \cdot [\overleftarrow{(AA')} + \overrightarrow{(AA')}] \cdot C = A^+ \cdot \overleftarrow{(AA') \cdot C}. \quad (102)$$

При умножении справа она играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } A' \rangle$  и нулевой на  $\langle \ker A' \rangle$ :

$$C \cdot A^+ = [C \cdot (\overleftarrow{A'A} + \overrightarrow{A'A})] \cdot A^+ = (C \cdot \overleftarrow{A'A}) \cdot A^+. \quad (103)$$

В частности,  $B^+$  коммутирует с  $B$  только на пересечении подпространств:  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \text{im } B' \rangle$ . Отсюда следует, что

$$B^- = B^+ \leftrightarrow B \in \langle Bm \rangle \leftrightarrow B^+ \cdot B = B \cdot B^+. \quad (104)$$

В любом случае, согласно (102) и (103),  $B^+$  представляется прямой ортогональной суммой обратной и нулевой матриц. Ортогональная квазиобратная матрица имеет исключительное геометрическое значение в евклидовом пространстве с ортонормированным базисом. Среди всех квазиобратных матриц, задаваемых уравнением Пенроуза  $A \cdot X \cdot A = A$ , она, как известно, имеет минимальную норму Фробениуса, то есть матричную норму 1-го порядка (см. § 9.1). При этом, что тождественно, она является его нормальным решением как слева, так и справа [18]. Указанное обстоятельство обусловлено требованием (100). Кроме того, она сама даёт те же нормальные решения с минимумом нормы Фробениуса для правого, левого и смешанного линейного матричного уравнения:

$$\underset{n \times m}{A_1} \cdot X = A \rightarrow \underset{n \times t}{\overset{\bullet}{X}} = \underset{m \times t}{A_1^+} \cdot A, \quad (105)$$

$$\underset{n \times m}{Y} \cdot \underset{t \times m}{A_2} = A \rightarrow \underset{t \times n}{\overset{\bullet}{Y}} = \underset{A \cdot A_2^+}{}, \quad (106)$$

$$\underset{n_1 \times m_1}{A_1} \cdot \underset{n_2 \times m_2}{X} \cdot \underset{n_1 \times m_2}{A_2} = A \rightarrow \underset{m_1 \times n_2}{\overset{\bullet}{X}} = \underset{n_1 \times m_1}{A_1^+} \cdot \underset{n_2 \times m_2}{A} \cdot \underset{m_1 \times n_2}{A_2^+}. \quad (107)$$

При этом невязка вышеуказанных линейных уравнений также имеет минимальную норму:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\Delta}_1 = - \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A, \\ \dot{\Delta}_1 = Z \leftrightarrow A \in \langle \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \mathcal{E}^{n \times t} \rangle \equiv \langle \text{KER}_R \overrightarrow{A_1 A_1'} \rangle; \end{array} \right\} \quad (108)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\Delta}_2 = - A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2}, \\ \dot{\Delta}_2 = Z \leftrightarrow A \in \langle \mathcal{E}^{t \times m} \cdot \overleftarrow{A_2' A_2} \rangle \equiv \langle \text{KER}_L \overrightarrow{A_2' A_2} \rangle; \end{array} \right\} \quad (109)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\Delta} = - \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A - A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2} + \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2}, \\ \dot{\Delta} = Z \leftrightarrow A \in \langle \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \mathcal{E}^{n_1 \times m_2} \cdot \overleftarrow{A_2' A_2} \rangle \equiv \langle \text{KER}_R \overrightarrow{A_1 A_1'} \cap \text{KER}_L \overrightarrow{A_2' A_2} \rangle. \end{array} \right\} \quad (110)$$

Кроме того [3],  $A^+$  является единственным элементом пересечения множеств правых и левых квазиобратных матриц [18, 55], задаваемых уравнениями типа (99). В общем виде имеем:

$$\langle A_R^- \rangle \equiv A^+ \oplus \langle \overrightarrow{A' A} \cdot \mathcal{E}^{m \times n} \cdot \overleftarrow{A A'} \rangle \quad (111)$$

– они производят ортопроекторы, указанные в (108);

$$\langle A_L^- \rangle \equiv A^+ \oplus \langle \overleftarrow{A' A} \cdot \mathcal{E}^{m \times n} \cdot \overrightarrow{A A'} \rangle; \quad (112)$$

– они производят ортопроекторы, указанные в (109);

$$A^+ = \langle A_R^- \rangle \cap \langle A_L^- \rangle. \quad (113)$$

Согласно (108) – (110), имеем:

$$\begin{aligned} \text{rang } A_1 = n &\rightarrow \overset{\bullet}{\Delta}_1 = Z, \\ \text{rang } A_2 = m &\rightarrow \overset{\bullet}{\Delta}_2 = Z, \\ \left. \begin{array}{l} \text{rang } A_1 = n_1 \\ \text{rang } A_2 = m_2 \end{array} \right\} &\rightarrow \overset{\bullet}{\Delta} = Z. \end{aligned} \quad (114)$$

В частности, исследуем дополнительно классическое уравнение:

$$\| Ax - a \| = \min, \quad \dot{x} = A^+ \cdot a = [\dot{A}(r)/k(AA', r)] \cdot a, \quad (115)$$

$$\dot{\delta} = - \overrightarrow{AA'} \cdot a; \quad (116)$$

$$\dot{\delta} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a \in \langle \ker \overrightarrow{AA'} \rangle \equiv \langle \ker K_1(AA', r) \rangle. \quad (117)$$

Геометрически минимодульная невязка уравнения (115) есть антипроекция (116). Поэтому для её евклидовой нормы справедливо:

$$\| \dot{\delta} \|^2 = - \dot{\delta}' \cdot a, \quad (118)$$

$$\| \dot{\delta} \| = \sin \varphi \| a \|, \quad (119)$$

где  $\varphi$  – скалярный угол между вектором  $a$  и подпространством  $\langle \text{im } A \rangle$ .

В заключение исходя из (101) дадим формулу для элементов  $(pq)$   $m \times n$ -матрицы  $\dot{A}(r)$  в (115) в эрмитизированной форме:

$$(pq) = \sum_{C_m^r} \sum_{C_{n-1}^r} \overline{\det \left\{ \begin{array}{c} (qp) \in \\ \text{minor } (r) \end{array} A \right\}} \cdot \text{Ad}_{q'p'} \left\{ \begin{array}{c} (qp) \in \\ \text{minor } (r) \end{array} A \right\},$$

где  $p = \overline{1, m}$ ,  $q = \overline{1, n}$ ;  $p'$  – новые индексы элемента  $a_{qp}$  в минорах  $A$ . В итоге формула (115) даёт обобщение формул Крамера. В частности, при  $r = n = m$  она даёт матричное решение невырожденного линейного уравнения, так как  $\dot{A}(n) = \det A \cdot A^v$ ,  $k(AA^*, n) = \det A \cdot \det A$ .

## Глава 3. Основные скалярные инварианты сингулярных матриц

### § 3.1. Минорант матрицы и его применение

Если  $A_1$  и  $A_2$  суть  $n \times m$ -матрицы, то  $k(A_1 A_2', t) = k(A_2 A_1', t)$ . Напомним, что скалярные коэффициенты представляют собой сумму детерминантов диагональных миноров одного и того же порядка  $t$ . Представим каждый диагональный минор матрицы  $A_1 A_2'$  через мультипликацию  $t \times m$ -субматриц строк:

$$\{D\text{-minor}(t)A_1 A_2'\} = \{\text{lig}(t)A_1\} \cdot \{\text{lig}(t)A_2\}'.$$

Согласно формуле Бине – Коши [30, с.39], его детерминант есть сумма всех парных произведений детерминантов миноров порядка  $t$  с одним и тем же набором номеров столбцов. При транспонировании матриц  $A_1$  и  $A_2$  во всех указанных формулировках строки заменяют на столбцы, а столбцы на строки. Именно так устанавливается взаимно-однозначное соответствие между двумя совокупностями  $C_n^t, C_m^t$  произведений детерминантов миноров, которые в сумме составляют скалярные коэффициенты порядка  $t$  для матриц  $A_1 \cdot A_2'$  и  $A_1' \cdot A_2$ . Следовательно, эти коэффициенты равны между собой, что даёт формулу перегруппировки:

$$k(A_1 A_2', t) = k(A_1' A_2, t) = k(A_2 A_1', t) = k(A_2' A_1, t). \quad (120)$$

В частности, если  $A_1 = A_2 = A$ , то

$$k(AA', t) = \sum_{C_m^t} \sum_{C_n^t} \det^2 \{\text{minor}(t)A\} = k(A'A, t) \geq 0. \quad (121)$$

Для высшего порядка  $t = r$  определим положительную характеристику прямоугольной матрицы – *минорант*:

$$\mathcal{M}(r)A = \sqrt{k(AA', r)} = \sqrt{k(A'A, r)} = \mathcal{M}(r)A' > 0.$$

Из (121) непосредственно видно, что минорант равен квадратному корню из суммы квадратов детерминантов всех базисных миноров матрицы.

Частные случаи для миноранта.

1) Пусть  $n > m = r$ . Тогда  $\mathcal{M}t^2(m)A = \det A'A$  и квадрат миноранта равен определителю Грама для совокупности  $m$  вектор-столбцов  $A$ .

2) Пусть  $m = 1$ . Тогда минорант есть евклидова норма вектора  $a$ .

3) Пусть  $n = m = r$ . Тогда минорант есть модуль детерминанта квадратной матрицы.

Используя (67), нетрудно получить минорант гомомультиплексации

$$\begin{aligned}\mathcal{M}t(r)\underbrace{\{AA'A\ldots\}}_h &= \mathcal{M}t(r)\{A'AA'\ldots\} = \sqrt{k[(AA')^h, r]} = \sqrt{k^h(AB', r)} = \\ &= \mathcal{M}t^h(r)A.\end{aligned}$$

Пусть  $\{A|a\}$  – расширенная по столбцам матрица уравнения (115). С учётом (116), используя известное свойство определителя Грама [14, с. 216], получаем формулу

$$\mathcal{M}t(r+1)\{A|a\} = \sin \varphi \cdot \|a\| \cdot \mathcal{M}t(r)A = \|\dot{\delta}\| \cdot \mathcal{M}t(r)A. \quad (122)$$

В частности, отсюда имеем *формульное* выражение теоремы Кронекера – Капелли через значение суммы квадратов детерминантов всех миноров порядка  $(r+1)$ :

$$\mathcal{M}t^2(r+1)\{A|a\} = 0 \leftrightarrow \dot{\delta} = 0 \leftrightarrow \sin \varphi = 0.$$

Представим формулу (122) тригонометрически

$$0 \leq \sin \varphi = \mathcal{M}t(r+1)\{A|a\} / \mathcal{M}t(r)A \cdot \mathcal{M}t(1)a \leq 1. \quad (123)$$

В частности, получаем формулу для синуса угла между двумя векторами

$$\begin{aligned}\sin \varphi_{12} &= \mathcal{M}t(2)\{a_1|a_2\} / \mathcal{M}t(1)a_1 \cdot \mathcal{M}t(1)a_2 = \\ &= \sqrt{\det\{[a_1|a_2]'\cdot[a_1|a_2]\}} / \|a_1\| \cdot \|a_2\| \geq 0.\end{aligned} \quad (124)$$

Используя связь миноранта  $n \times m$ -матрицы с определителем Грама для совокупности её вектор-столбцов ( $m \leq n$ ), нетрудно установить его геометрический смысл. Вначале рассмотрим случай  $m = r$ . (Такие специальные матрицы широко используются во втором разделе монографии для представления линейных геометрических объектов.) Запишем матрицу в виде набора вектор-столбцов. Пусть  $A_j$  есть  $n \times j$ -матрица, образуемая первыми  $j$  вектор-столбцами. Каждая последующая  $A_{j+1}$  рассматривается как расширенная матрица  $\{A_j|a_{j+1}\}$ . К ней применяются формулы (119) и (122) или известная геометрическая связь с корнем из определителя Грама [14, с. 215–219]. В результате последовательного применения этих формул получаем выражение для миноранта в виде

$$\mathcal{M}_t(r)A = v_r = \| \mathbf{a}_1 \| \cdot \sin \varphi_{1,2} \cdot \| \mathbf{a}_2 \| \cdot \sin \varphi_{1,2,3} \cdot \dots \cdot \| \mathbf{a}_r \| \leq \| \mathbf{a}_1 \| \cdot \| \mathbf{a}_2 \| \cdot \dots \cdot \| \mathbf{a}_r \|, \quad (125)$$

где  $v_r$  – обобщённый  $r$ -мерный объём косого параллелепипеда, натянутого на вектор-столбцы матрицы  $A$  ( $0 < \varphi \leq \pi/2$ ). При  $n = m = r$  имеет место синусное неравенство Адамара [27, с.35]. Кроме того, на основании (74) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_t(r)A &= \prod_{i=2}^q \sigma_i^{s_i} > 0, \\ \overrightarrow{AA'} &= \prod_{i=2}^q (\sigma_i^2 \cdot I_{n \times n} - AA') / \sigma_i^2, \end{aligned} \right\} (\sigma_i > 0) \quad (126)$$

где  $\sigma_i^2$  – ненулевые собственные значения матрицы  $AA'$  или  $A'A$ .

В самом общем случае ( $n \geq m \geq r \geq t$ ) коэффициенты выражаются либо геометрически как суммы квадратов частных  $t$ -мерных объёмов, либо алгебраически как суммы Виета для собственных значений:

$$\left. \begin{aligned} k(AA', t) &= \sum_{C_m^t} v_{t(p)}^2 = s_t(\sigma_i^2) = v_t^2 > 0, \\ k(AA', l) &= \sum_{l(p)} l^2 = s_l(\sigma_i^2) = l^2 = \|A\|_F^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Если используются декартовы координаты, то  $v_{t(p)}$  есть ортопроекция объёма  $v_t$  ранга  $t$ . Отношение  $v_{t(p)} / v_t = \cos \alpha_p$  есть  $p$ -й направляющий косинус. Формула (127) выражает теорему Пифагора для линейных объектов, задаваемых, в частности,  $n \times r$ -матрицей. Все вышеуказанные характеристики всегда положительны и инвариантны по отношению к ортогональному преобразованию вектор-столбцов или вектор-строк  $A$  и базиса. Например,

$$\mathcal{M}_t(r)A = \mathcal{M}_t(r)\{R_1 \cdot A \cdot R_2\} = \mathcal{M}_t(r)\sqrt{AA'} = \mathcal{M}_t(r)\sqrt{A'A}. \quad (128)$$

Здесь, возможно, сингулярные арифметические корни связаны с матрицей через *квазиполярное разложение* (называемое ещё как *QR-разложение*):

$$A = S_1^{\oplus} \cdot Rq = \sqrt{AA'} \cdot \{(\sqrt{AA'})^+ \cdot A\}, \quad (129)$$

$$A = Rq \cdot S_2^{\oplus} = \{A \cdot (\sqrt{A'A})^+\} \cdot \sqrt{A'A}, \quad (130)$$

где  $S_1^{\oplus} = Rq \cdot S_2^{\oplus} \cdot Rq' \leftrightarrow AA' = Rq \cdot A'A \cdot Rq'$ ,

$$Rq = A \cdot (\sqrt{A'A})^+ = (\sqrt{AA'})^+ \cdot A \rightarrow A \cdot \sqrt{A'A} = \sqrt{AA'} \cdot A,$$

$$Rq \cdot Rq' = \overleftarrow{AA'}, \quad Rq' \cdot Rq = \overleftarrow{A'A}, \quad Rq' = Rq^+$$

Нетрудно видеть, что здесь преобразование  $A \rightarrow Rq$  тождественно по результату процессу ортогонализации Грама – Шмидта для системы  $m$  линейно независимых векторов:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_m\} = Rq.$$

Это алгебраическое преобразование есть его некий *однозначный* вариант (для заданной последовательности). Вообще же в евклидовом пространстве процесс ортогонализации Грама – Шмидта приобретает мнемонически более удобную алгебраическую форму и более очевидную геометрическую интерпретацию в сравнении с классической [27, с. 431], если для его реализации применять ортопроекторы:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1, \quad v_i = a_i - \sum_{k=1}^{i-1} [e_k \cdot e_k'] \cdot a_i = \{I - \sum_{k=1}^{i-1} [e_k \cdot e_k']\} \cdot a_i; \\ e_t &= v_t / \|v_t\|, \quad t = 1, m; \quad e_i \cdot e_i' = \overleftarrow{e_i \cdot e_i'} \quad (\text{в итоге имеем: } v_i = [e_i \cdot e_i'] \cdot a_i). \end{aligned}$$

### § 3.2. Синусные характеристики матриц

Если  $E = \{e_i\}_{n \times n}$ , где  $\|e_i\| = 1$ , то в декартовом базисе матрица  $E$  задаёт  $n$ -рёберный (полигранный) тензорный угол в  $\langle E^n \rangle$ , а  $|\det E|$ , согласно неравенству Адамара (см. выше), определяет его скалярную синусную характеристику. Этому же полигранному углу однозначно соответствует взаимный тензорный угол, задаваемый матрицей  $\hat{E} = \{\hat{e}_i\}_{n \times n} = \{\vec{E}_i \vec{E}_i' \cdot e_i \cdot \sec \beta_i\}$ , где  $\vec{E}_i$  получают из исходной  $E$  обнулением  $i$ -го столбца. Причём имеем ряд соотношений:

$$\cos \beta_i = e_i' \cdot \hat{e}_i \rightarrow \cos^2 \beta_i = e_i' \cdot \vec{E}_i \vec{E}_i' \cdot e_i, \quad e_i' \cdot \hat{e}_j = 0 \quad (0 < \cos \beta_i \leq 1).$$

Внутренние мультипликации этих двух матриц связаны формулами:

$$E' \cdot \hat{E} = D_{\cos \beta} = \hat{E}' \cdot E,$$

$$E' E = D_{\cos \beta} \cdot (\hat{E}' \cdot \hat{E})^{-1} \cdot D_{\cos \beta},$$

$$\hat{E}' \hat{E} = D_{\cos \beta} \cdot (E' E)^{-1} \cdot D_{\cos \beta};$$

$$G = \sqrt{D_{\sec \beta}} \cdot E' E \cdot \sqrt{D_{\sec \beta}} = \hat{G}^{-1} = [\sqrt{D_{\sec \beta}} \cdot \hat{E}' \hat{E} \cdot \sqrt{D_{\sec \beta}}]^{-1}. \quad (131)$$

Во взаимных базисах  $\{E \sqrt{D_{\sec \beta}}\}$  и  $\{\hat{E} \sqrt{D_{\sec \beta}}\}$  матрицы  $G$  и  $\hat{G}$  суть соответствующие взаимные метрические тензоры. Синусные характеристики взаимных тензорных углов связаны формулой

$$\det(E' E) \cdot \det(\hat{E}' \cdot \hat{E}) = \det^2 D_{\cos \beta} = \prod_{i=1}^n \cos^2 \beta_i.$$

Откуда следует, что  $|\det E| \cdot |\det \hat{E}| = \det D_{\cos \beta}$ ;  $|\det E, \det \hat{E}| \leq 1$ . Однако в данной монографии изучаются только тензорные углы *бинарного типа*, то есть углы, образуемые парами линейных подпространств (при  $r = 1$  – прямых) или парами конечных линейных объектов (при  $r = 1$  – векторов).

Вернёмся к специальным прямоугольным матрицам ( $n > m = r$ ). Докажем, что для миноранта их внешних мультиPLICATIONей имеет место формула расщепления

$$\mathcal{M}t(r)\{A_1 A_2'\} = \mathcal{M}t(r)A_1 \cdot \mathcal{M}t(r)A_2 = \sqrt{\det(A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\det(A_2' A_2)}. \quad (132)$$

Используя определение миноранта, квазиполярное разложение типа (130) и формулу (128), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}t^2(r)\{A_1 A_2'\} &= k[(A_1 A_2' A_2 A_1'), r] = k[(Rq_1 \cdot S_1^\oplus \cdot S_2^\oplus \cdot S_1^\oplus \cdot S_1^\oplus \cdot Rq_1'), r] = \\ &= k[(S_1^\oplus \cdot S_2^\oplus \cdot S_2^\oplus \cdot S_1^\oplus), r] = \det(A_1' A_1) \cdot \det(A_2' A_2) = \mathcal{M}t^2(r)A_1 \cdot \mathcal{M}t^2(r)A_2. \end{aligned}$$

Далее для внешних мультиPLICATIONей будут применяться обозначения:

$$B = A_1 \cdot A_2', \quad B' = A_2 \cdot A_1',$$

где для специальных прямоугольных матриц имеем:  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \ker B \rangle \equiv \langle \ker A_2' \rangle$ ,  $\langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle$ ,  $\langle \ker B' \rangle \equiv \langle \ker A_1' \rangle$ . С учётом того, что  $m = \text{rang } A$ , имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{\{A_1 A_2' A_2 A_1'\}} = \overrightarrow{A_1 A_1'}, \\ \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{\{A_2 A_1' A_1 A_2'\}} = \overrightarrow{A_2 A_2'}, \\ \overleftarrow{BB'} = \overleftarrow{\{A_1 A_2' A_2 A_1'\}} = \overleftarrow{A_1 A_1'}, \\ \overleftarrow{B'B} = \overleftarrow{\{A_2 A_1' A_1 A_2'\}} = \overleftarrow{A_2 A_2'}. \end{array} \right\} \quad (133)$$

С учётом формул (61), (62) и (132), (133) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} K_{1,2}[(A_1 A_2' A_2 A_1'), r] = \det(A_2' A_2) \cdot K_{1,2}(A_1 A_1', r), \\ K_{1,2}[(A_2 A_1' A_1 A_2'), r] = \det(A_1' A_1) \cdot K_{1,2}(A_2 A_2', r). \end{array} \right\} \quad (134)$$

Пусть теперь ранг обеих прямоугольных матриц может отличаться, но  $r_1 + r_2 \leq n$ . Определим их *внешнюю суперпозицию* как  $\{A_1 | A_2\}$ . Обобщая (123), вводим *синусное отношение*:

$$\begin{aligned} |\{A_1 | A_2\}|_{\sin} &= \mathcal{M}t(r_1 + r_2)\{A_1 | A_2\} / \mathcal{M}t(r_1)A_1 \cdot \mathcal{M}t(r_2)A_2 = \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} A_1' A_1 & A_1' A_2 \\ A_2' A_1 & A_2' A_2 \end{pmatrix}} / \sqrt{\det(A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\det(A_2' A_2)} \geq 0. \end{aligned} \quad (135)$$

Оно обобщает классическое соотношение (124) для синуса угла между векторами  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ . Синусное отношение имеет природу полуопределенной нормы. Отметим также, что с использованием миноранта классическая теорема Кронекера – Капелли естественным образом обобщается на матричные линейные уравнения типа (105) – (107):

$$\mathcal{M}^2(r_1 + r_2 + 1) \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A \\ \hline Z & A_2 \\ \hline \end{array} = 0 \leftrightarrow \overset{\bullet}{\Delta} = Z. \quad (136)$$

### § 3.3. Косинусные характеристики матриц

Далее определим ещё одну высшую скалярную характеристику, но только для квадратной матрицы – *дианаль*:

$$\mathcal{D}(r)B = k(B, r)B'.$$

Используя понятия минорант и дианаль, определим другую скалярную тригонометрическую характеристику – *косинусное отношение*:

$$|\{B\}|_{\cos} = |\mathcal{D}(r)B| / \mathcal{M}(r)B \geq 0, \quad (137)$$

которое имеет природу косинусной полуопределенной нормы. Не трудно видеть, что это отношение равно 0 для нуль-дефектной матрицы и 1 для нуль-нормальной матрицы. В свою очередь, имеем:

$$\{B\}_{\cos} = \mathcal{D}(r)B / \mathcal{M}(r)B = \prod_{i=2}^{q_1} \mu_i^{s_{1i}} / \prod_{j=2}^{q_2} \sigma_j^{s_{2j}}. \quad (138)$$

Если  $A_1$  и  $A_2$  суть  $n \times m$ -матрицы, то

$$\begin{aligned} \{A_1 \cdot A_2'\}_{\cos} &= \mathcal{D}(r)(A_1 \cdot A_2') / \mathcal{M}(r)(A_1 \cdot A_2') = \\ &= \mathcal{D}(r)(A_2 \cdot A_1') / \mathcal{M}(r)(A_2 \cdot A_1'). \end{aligned} \quad (139)$$

Если же  $A_1$  и  $A_2$  –  $n \times r$ -матрицы, то, согласно (120) и (132), имеем:

$$\begin{aligned} \{A_1 \cdot A_2'\}_{\cos} &= \mathcal{D}(r)(A_1 \cdot A_2') / \mathcal{M} r A_1 \cdot \mathcal{M} r A_2 = \\ &= \det(A_1' \cdot A_2) / \sqrt{\det(A_1' \cdot A_1)} \cdot \sqrt{\det(A_2' \cdot A_2)}. \end{aligned} \quad (140)$$

Причём  $\mu_i(A_1 \cdot A_2') = \mu_i(A_1' \cdot A_2)$ ,  $\sigma_j(A_1 \cdot A_2') = \sigma_j(A_1' \cdot A_2)$ . Соотношение (140) обобщает классическую формулу для косинуса угла между векторами  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ :

$$-1 \leq \cos \varphi_{12} = \text{tr}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2') / \mathcal{M}(1) \mathbf{a}_1 \cdot \mathcal{M}(2) \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2 / \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \leq +1. \quad (141)$$

Тригонометрический смысл косинусного и синусного отношений устанавливается во втором разделе монографии на основе матричного тригонометрического спектра. Заметим, что квадрат формулы (135) можно рассматривать как тождество для координат некоторых линейных геометрических объектов, задаваемых матрицами  $A_1$  и  $A_2$ . При  $m=1$  оно соответствует тождеству Лагранжа ( $n=3$ ) и тождеству Коши ( $n>2$ ) применительно к координатам пары центральных векторов в аффинном пространстве. С точки зрения евклидовой геометрии эти тождества для векторов имеют тригонометрический характер:

$$[\mathcal{M}(2)\{\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2\}/\mathcal{M}(1)\mathbf{a}_1 \cdot \mathcal{M}(2)\mathbf{a}_2]^2 + [\mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2/\mathcal{M}(1)\mathbf{a}_1 \cdot \mathcal{M}(2)\mathbf{a}_2]^2 = 1. \quad (142)$$

Они являются основой для нормирования или измерения угла между векторами в евклидовом пространстве. Все дальнейшие родственные понятия рассматриваются во втором разделе монографии применительно к линейным объектам – более общим, чем векторы.

### § 3.4. Предельные методы вычисления проекторов и квазиобратных матриц

Согласно (1) и (101), справедливы предельные формулы:

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A' \cdot (AA' + \varepsilon I)^{-1}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(A'A + \varepsilon I)^{-1} \cdot A'] = \quad (143)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot A' \cdot (N \cdot AA' + I)^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [(N \cdot A'A + I)^{-1} \cdot N \cdot A']. \quad (144)$$

Здесь используется то обстоятельство, что из  $\overrightarrow{A'}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}' = Z = \overrightarrow{A'}\overrightarrow{A}\overrightarrow{A}'$  следует соотношение  $K_1(A'A, r) \cdot A' = Z = A' \cdot K_1(AA', r)$ . Как и общие формулы (71)–(73), частные предельные формулы (143), (144) получены здесь чисто алгебраическим путём.

Впервые же нормальное решение линейного уравнения типа  $Ax = \mathbf{a}$  в форме предела получил Тихонов [44], но функциональным способом. При этом был использован его же метод регуляризации применительно к задаче на условный экстремум частного характера. А именно: найти значение аргумента с минимумом евклидовой нормы на множестве, соответствующем минимуму невязки уравнения:

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) = \varepsilon \cdot F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) = \min_{(\varepsilon \rightarrow 0)}, \quad dU/d\mathbf{x} = \mathbf{0}_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \quad (145)$$

$$(F_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}; \quad F_2(\mathbf{x}) = \delta'(\mathbf{x}) \cdot \delta(\mathbf{x}), \quad \delta(\mathbf{x}) = Ax - \mathbf{a}).$$

Аналогичный результат, но в форме (144), мог быть получен ещё раньше методом штрафных функций Куранта [16]:

$$W(\mathbf{x}, N) = F_1(\mathbf{x}) + N \cdot F_2(\mathbf{x}) = \min_{(N \rightarrow \infty)}; \quad dW/d\mathbf{x} = \mathbf{0}_{(N \rightarrow \infty)}. \quad (146)$$

Оба эти метода связаны взаимно-однозначно через умножение или деление на соответствующий скалярный параметр. В свою очередь, метод штрафных функций Куранта решает задачу на условный экстремум  $F_1(\mathbf{x})$  с градиентной ( $1 \times n$ ) функцией ограничений  $\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = dF_2/d\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Интегрирование позволяет в таком случае перейти от обычной *векторной* к новой и тождественной ей *скалярной форме* ограничения:

$$h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_s}^{\mathbf{x}} \mathbf{h}'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 = \text{const}. \quad (147)$$

Тогда имеем в (146) функцию Лагранжа  $W(\mathbf{x}, N)$  и *единственный* в ней скалярный множитель Лагранжа  $N \rightarrow \infty$ , так как при этом из дифференциального уравнения в (146) следует, что

$$dh/dx \cdot N = \mathbf{h}'(\mathbf{x}) \cdot N = \mathbf{0} \cdot N = -dF_1/dx \neq \mathbf{0}.$$

Например, вышеуказанные предельные методы применимы к решению задачи на условный экстремум  $F_1(\mathbf{x})$  на области стационарности  $F_2(\mathbf{x})$ . Данную цепочку можно продолжить в форме многочлена от  $\varepsilon$  или от  $N$ . Достаточное условие применимости этих двух предельных методов в *дифференциальной форме* (с малым или с большим параметром) есть, согласно (147), интегрируемость  $1 \times n$ -вектор-функции ограничений, а, следовательно, симметричность  $n \times n$ -матрицы Якоби:  $d\mathbf{h}/d\mathbf{x} = (d\mathbf{h}/d\mathbf{x})'$ . В случае нормального решения уравнения  $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$  указанная матрица Якоби есть матрица  $A$ .

*Согласно общему предельному методу, дифференциальные уравнения  $\varepsilon \cdot dF_1/dx + \mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{(\varepsilon \rightarrow 0)}$ , или  $dF_1/dx + N \cdot \mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{(N \rightarrow \infty)}$  дают полное решение, соответствующее условной стационарности функции  $F_1(\mathbf{x})$  при ограничении  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , тогда и только тогда, когда матрица Якоби вектор-функции ограничений  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  является нуль-нормальной; при этом характер условной стационарности задаёт предельная условная матрица Гессе (с точностью до скалярного параметра).*

В частности, этот метод даёт весьма просто явное решение задачи на условный экстремум функции второго порядка  $Q(\mathbf{x})$  при линейном ограничении  $Bm \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}$ . Для квазиобратной матрицы Мура – Пенроуза  $Bm^+$  имеем предельное значение, согласно (73) и (104). В свою очередь, аффинная квазиобратная матрица находится тем же функциональным способом, если использовать вспомогательное линейное преобразование базиса, приводящее нуль-простую матрицу Якоби к нуль-нормальной форме с учётом (69) и (104):

$$\begin{aligned} Bp \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} &\rightarrow \{T \cdot Bp \cdot T^{-1}\} \cdot T\mathbf{x} = Ta \sim Bm \cdot T\mathbf{x} = Ta \rightarrow (\overset{\bullet}{T}\mathbf{x}) = Bm^+ \cdot Ta \rightarrow \\ &\rightarrow \overset{\bullet}{\mathbf{x}} = \{T^{-1} \cdot Bm^+ \cdot T\} \cdot \mathbf{a} = Bp^- \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

## Глава 4. Два альтернативных варианта комплексификации

### § 4.1. Сопоставление основных вариантов

В силу природы комплексных чисел реализуются два принципиально различных подхода к операциям с задаваемыми ими комплексными элементами. Эти операции определяют сущность выполняемой комплексификации.

*Адекватный подход* заключается в том, что комплексные элементы подвергают тем же операциям, которые применяют для вещественных элементов. Такой вариант комплексификации даёт возможность, как правило, использовать результаты, полученные ранее для вещественных понятий. Исключением при этом являются отношения типа неравенств, конечно, не для заведомо вещественных параметров. Особый случай отвечает *псевдоизации*, когда комплексные элементы – вещественные и мнимые.

*Симбиозный подход*, помимо указанных операций, применяет для некоторых комплексных элементов независимую операцию комплексного сопряжения. В частности, *эрмитов подход* к комплексному векторному и матричному исчислению сопровождает каждую операцию транспонирования дополнительно комплексным сопряжением. Эрмитов вариант комплексификации даёт возможность использовать в самосопряжённой форме понятия вещественного положительного модуля и нормы, а также сохранить в той же форме отношения типа неравенств.

Эти альтернативные варианты определяют два пути дальнейшего развития теории и её приложений в комплексных пространствах. Так, соотношение  $\langle \mathbf{i}m \mathbf{B} \rangle \equiv \langle \mathbf{i}m \mathbf{B}' \rangle$  задаёт *адекватно нуль-нормальные* матрицы, а  $\langle \mathbf{i}m \mathbf{B} \rangle \equiv \langle \mathbf{i}m \mathbf{B}^* \rangle$  задаёт *эрмитово нуль-нормальные* матрицы. Адекватно и эрмитово ортогональные проекторы и квазиобратная матрица определяются различно с учётом (98)–(101). Причём адекватные комплексные характеристики существуют также всегда, как и эрмитовы, поскольку из (86) имеем:

$$\mathcal{M}t^2(r)A = k(AA', r) = k(A'A, r) = \det B_1 = \prod_{i=2}^q v_i^2 \neq 0.$$

С другой стороны, в эрмитовом варианте:  $k(AA^*, t) = k(A^*A, t) > 0$ ,  $t \leq r$ . В любом случае все проекторы – спектрально неотрицательные матрицы. Разумеется, *аффинные* проекторы и квазиобратная матрица не зависят от выбора варианта комплексификации. Заметим, что для комплексной *несингулярной* матрицы:  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \text{im } B^* \rangle$ . Поэтому комплексная обратная матрица определяется однозначно.

К трём скалярным формам представления комплексного числа (алгебраическая, тригонометрическая и показательная) и к векторной форме можно добавить ещё  $2 \times 2$ -матричную форму, которая вообще не содержит мнимой единицы:

$$\left. \begin{aligned} W(a) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline p & -q \\ q & p \\ \hline \end{array} = p \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \\ \hline \end{array} = S + K, \\ (a = p + iq) \\ W'(a) = W(\bar{a}) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline p & q \\ -q & p \\ \hline \end{array} = p \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \hline \end{array} = S - K, \\ (\bar{a} = p - iq) \end{array} \right\} \quad (148)$$

где  $S = S'$ ,  $K = -K'$ ,  $SK = KS$ . Форма (148) представляет число «*a*» геометрически в *вещественном* декартовом базисе евклидова пространства. Вещественные представления (148), как и комплексные, коммутативны и удовлетворяют всем формулам и тождествам для комплексных чисел. Они образуют транспонированные по отношению друг к другу пары – аналоги комплексных сопряжённых пар. С этой точки зрения вещественная нормальная  $n \times n$ -матрица представляет геометрически в некотором декартовом базисе  $k \leq [n/2]$  комплексных чисел и  $(n - 2k)$  вещественных чисел:  $M = R \cdot W \cdot R'$ . Простая вещественная матрица представляет те же числа в некотором аффинном базисе:  $P = V \cdot W \cdot V^{-1}$ . Матрица  $W$ , как известно [14], есть каноническая вещественная монобинарная форма, включающая в прямой сумме только  $1 \times 1$ - и  $2 \times 2$ -клетки. Она же с точностью до перестановок этих клеток является простейшим вещественным решением векового уравнения матрицы  $c(\mu) = 0$ . Применяя к простой матрице теорему Гамильтона – Кэли, получаем:  $V^{-1} \cdot \{c(P)\} \cdot V = c(W) = Z$ .

Далее на основе (148) осуществляем комплексификацию уже матричной формы числа – либо по адекватному варианту, либо по эрмитовому варианту.

В первом случае имеем:

$$\left. \begin{array}{l} W(z_1) \\ \boxed{\begin{matrix} u & -v \\ v & u \end{matrix}} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = S + K, \\ (z_1 = u + iv) \\ \\ W'(z_1) = W(z_2) \\ \boxed{\begin{matrix} u & v \\ -v & u \end{matrix}} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = S - K. \end{array} \right\} \quad (149)$$

$$(z_2 = u - iv)$$

Адекватная  $W$ -форма (149) реализуется геометрически в адекватно декартовом базисе комплексного евклидова пространства. Комплексная адекватно нормальная матрица может представлять удвоенное количество комплексных чисел в тех же базисах. Элементы её  $W$ -формы – комплексные числа. Упрощение адекватно нормальной матрицы путём адекватно ортогонального модального преобразования возможно вплоть до канонической  $W$ -формы.

Во втором случае имеем:

$$\left. \begin{array}{l} W(z) \\ \boxed{\begin{matrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{matrix}} = H + Q, \\ (z = u + iv) \end{array} \quad \begin{array}{l} W^*(z) = W'(\bar{z}) \\ \boxed{\begin{matrix} \bar{u} & \bar{v} \\ -v & u \end{matrix}} = H - Q, \\ (\bar{z} = \bar{u} - i\bar{v}) \end{array} \right\} \quad (150)$$

где  $H = H^*$ ,  $Q = -Q^*$ ,  $HQ = QH$ . Эрмитова форма (150) реализуется в комплексном эрмитово декартовом (ортонормированном) базисе эрмитова пространства. Матрицы (150) и (148) при эрмитовой комплексификации упрощаются до диагональной формы в некотором эрмитово декартовом базисе. Ввиду этого эрмитово нормальная матрица представляет то же количество чисел – комплексных и вещественных, что и вещественная нормальная матрица. Её упрощение путём эрмитово ортогонального (унитарного) преобразования возможно вплоть до диагональной формы. Диагональные элементы:  $d_t = \rho_t \cdot \exp(i\beta_t)$ ;  $\rho_t = -\infty \div +\infty$ ,  $\beta_t = 0 \div \pi$ . (Для адекватно ортогональных матриц  $d_t = \pm 1$ ; для эрмитово ортогональных матриц  $\rho_t = \pm 1$ .) Комплексные единицы  $\pm \exp(i\beta_t)$  являются в общем случае отражательными диагональными элементами. Комплексное отражение (*рефлексия*) реализуется только в эрмитовом варианте как геометрическое преобразование. Если же диагональные элементы образуют комплексные сопряжённые пары, то в соответствующей бинарной тригонометрической клетке есть информация об эрмитовой ротации.

## § 4.2. Примеры адекватной комплексификации

Характерными примерами адекватной комплексификации являются формулы решений алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами; комплексные аналитические функции и тождества, дифференциалы и интегралы; тригонометрические формулы для комплексных углов. В комплексном пространстве, метризуемом по адекватному варианту, неизбежно получаются комплексные меры для протяжённости и угла, хотя в псевдоевклидовом пространстве реализуются вещественные и мнимые меры. Укажем соответствующие адекватные *псевдоаналоги*: псевдоевклидова геометрия, включая тригонометрию; псевдосферическая геометрия на сфере мнимого радиуса.

Рассмотрим, например, использование адекватной комплексификации в теории аналитических функций комплексного аргумента. Пусть  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ , где  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  –  $n \times 1$ -вектор-аргументы в комплексном и вещественных  $n$ -мерных евклидовых пространствах;  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + iF_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{z})$  – скалярная комплексная аналитическая функция от  $\mathbf{z}$ . Дифференцирование и интегрирование в евклидовом пространстве по  $n \times 1$ -вектор-аргументу осуществляется в декартовых координатах. Адекватные аналоги исходно имеют место для полных производных, дифференциалов и интегралов. Отсюда далее выводятся частные характеристики и устанавливается их взаимосвязь:

$$\begin{aligned} dF &= \mathbf{h}(\mathbf{z})d\mathbf{z} \leftrightarrow dF = dF_1 + idF_2 = (\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) (dx + idy) = \\ &= [\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})dx - \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})dy] + i[\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})dy + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})dx], \end{aligned}$$

где  $1 \times n$ -вектор-производные (частные градиенты) составляют пары:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{y}}, \\ \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

– уравнения Д'Аламбера–Эйлера в векторной форме (для скалярной функции  $F$ ). Применим повторно ту же схему для  $1 \times n$ -вектор-функции  $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x}^2} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y}^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{y}} &= -\frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y}^2} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{y}} \right)' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Первые два члена в цепочках этих равенств составляют уравнения Д'Аламбера–Эйлера в матричной форме (для дифференцируемой по комплексному аргументу вектор-функции). Наряду с симметричностью частных матриц Якоби (ввиду симметричности матриц Гессе), они же формулируют необходимые и достаточные условия полноты дифференциалов в квадратных скобках. Откуда для данных аналитических функций  $F_1$  и  $F_2$  (от двух вещественных аргументов) одновременно вытекают уравнения Лапласа в матричной форме.

В псевдоевклидовом пространстве (здесь в бинарной комплексной форме), в силу особенности его структуры, вышеуказанные характеристики и соотношения в некоторой степени видоизменяются

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = & \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ i\mathbf{y} \end{bmatrix}; \quad dF = \mathbf{h}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \leftrightarrow dF = dF_1 + idF_2 = \\ & = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{h}_2 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{h}_1 & \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} dx \\ idy \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})dx - \mathbf{t}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})dy] + \\ & + i \cdot [\mathbf{t}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})dy + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})dx], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{t}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{t}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{y}}$ ; (a')

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \right)', & \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{y}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} \right)', & \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{y}} &= -\frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{y}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} \right)' = - \left( \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{x}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} \right)' = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{y}} \right)', \end{aligned} \right\} \quad (b')$$

Отметим, что здесь уже нет требования по гармоничности функций  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и  $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Ранее использованные понятия также имеют адекватные аналоги за исключением неравенств не для заведомо вещественных параметров. (Среди последних – ранг, 1-й и 2-й рок). Параллельность линейных объектов, как известно, – аффинное понятие. Именно поэтому она не зависит от выбора варианта комплексификации. Но оптимальная процедура проверки параллельности объектов для вещественного и комплексного пространств различается. Пусть две  $n \times m$ -матрицы

$A_1$  и  $A_2$  задают линейные подпространства (или линейные объекты) в аффинном пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ . Чтобы использовать в процедуре проверки параллельности характеристические симметричные проекторы, нужно перейти к тождественной по образу  $n \times n$ -матрице:  $\langle \text{im } AC \rangle \equiv \langle \text{im } A \rangle$ , где  $C - m \times n$ -матрица, удовлетворяющая условиям:

$$1) \langle \text{im } C \rangle \cap \langle \ker A \rangle = \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rang } AC = \text{rang } A; \quad 2) k(AC, r) \neq 0.$$

В частности, для вещественного пространства выбирают  $C = A'$ , а для комплексного пространства лучше выбрать  $C = A^*$ . Вообще же имеют место отношения:

$$1) \langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{A_1} \overrightarrow{C_1} \cdot A_2 = A_2 \leftrightarrow \overrightarrow{A_1} \overleftarrow{C_1} \cdot A_2 = Z$$

$$(\overrightarrow{A_1} \overrightarrow{A_1}^* \cdot A_2 = Z = A_2^* \cdot \overrightarrow{A_1} \overrightarrow{A_1}^*).$$

$$2) \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \overrightarrow{A_1} \overleftarrow{C_1} \cdot A_2 = Z = \overrightarrow{A_2} \overleftarrow{C_2} \cdot A_1$$

$$(\overrightarrow{A_1} \overrightarrow{A_1}^* \cdot A_2 = Z = \overrightarrow{A_2} \overrightarrow{A_2}^* \cdot A_1 \leftrightarrow \overleftarrow{A_1} \overleftarrow{A_1}^* = \overleftarrow{A_2} \overleftarrow{A_2}^* \leftrightarrow \overrightarrow{A_1} \overrightarrow{A_1}^* = \overrightarrow{A_2} \overrightarrow{A_2}^*).$$

Но и для комплексных объектов можно также выбрать  $C = A'$ , так как для них имеем:

$$r = r' = \text{rang } A = \text{rang } AA' = \text{rang } A'A, \quad k(AA', r) \neq 0.$$

В свою очередь, ортогональность линейных объектов определяется для комплексного евклидова пространства в адекватном варианте:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow A_1 \cdot A_2 = Z = A_2 \cdot A_1,$$

а для эрмитова пространства – в эрмитовом варианте:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow A_1^* \cdot A_2 = Z = A_2^* \cdot A_1.$$

### § 4.3. Примеры эрмитовой комплексификации

Укажем примеры эрмитовой комплексификации. Это принцип максимума модуля, справедливый в том числе для вектор-функций; результаты, изложенные ранее с использованием операции транспонирования, включая неравенства (123), (124) и (141); неравенство Адамара и отвечающее ему неравенство (125) для миноранта – все в самосопряжённой форме. В тензорной тригонометрии эрмитова пространства особое значение имеет самосопряжённый аналог тождества Коши (142), на основе которого определяются эрмитово сферические тригонометрические функции бинарных углов на эрмитовой плоскости. Аналогично производятся косинусное и синусное нормирующие неравенства для угла между двумя векторами в эрмитовом пространстве.

Кроме того, в эрмитовом пространстве используют как аналоги вещественные положительно определённые меры: нормы для протяжённости и угла.

Формулировки теоремы Кронекера – Капелли через формулы (122) и (136) связаны с минорантным признаком параллельности. Минорант отличен от нуля в адекватном варианте и положителен в эрмитовом варианте комплексификации.

Более общий по сравнению с эрмитовым симбиозный подход, определённый в начале главы, в применении к теории аналитических функций и к основным операциям анализа (ортогональное дифференцирование и интегрирование) в комплексном пространстве приводит к симбиозным аналогам. Это суть особые правила симбиозного, или сопряжённого дифференцирования и интегрирования; особые условия дифференцируемости и аналитичности функций от сопряжённых аргументов  $\mathbf{x}$  и  $\bar{\mathbf{x}}$  и особые условия интегрируемости дифференциальных выражений (полноты дифференциала); симбиозные аналоги методов решения задач на безусловный и условный экстремум скалярной функции. Последняя необходимо симметрична по отношению к сопряжённым аргументам. По существу это есть дальнейшее развитие известной идеи формальных производных (см. например [12]) для анализа неголоморфных, в том числе особо важных *вещественных* функций комплексных переменных. Для иллюстрации таковых в данной монографии можно указать конкретные примеры: квадрат эрмитова модуля невязки (116) комплексного линейного уравнения – модульная функция  $\| \mathbf{Ax} - \mathbf{a} \|^2$ ; вещественные, в том числе положительные коэффициенты алгебраического уравнения, имеющего вещественные и комплексные сопряжённые корни-аргументы  $\mu_i$ , – немодульные функции от корней, сводимые в  $n \times 1$ -вектор-функцию  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\boldsymbol{\mu})$ .

Используя эрмитов вариант модуля невязки комплексного линейного уравнения и предельного метода решения задачи на условный экстремум (§§ 2.5 и 3.4), приходим к функциональному способу вывода предельной формулы (143), (144) для комплексной квазиобратной матрицы Мура – Пенроуза.

## **Раздел II. Фундаментальное содержание тензорной тригонометрии**

В начале главы 5 дана проективная версия евклидовой тензорной тригонометрии, развиваемая с применением собственных проекторов. Определяются проективные сферические функции и рефлекторы для тензорного угла между линеорами  $A_1$  и  $A_2$  или их образами – планарами ранга  $r_1$  и  $r_2$ . В иной, альтернативной интерпретации тензорный угол определяется между образами нуль-простых  $n \times n$ -матриц  $B$  и  $B'$  – планарами ранга  $r$ . Далее рассматривается каноническая структура тензорных тригонометрических функций и собственных рефлекторов. Определяется (с установлением его существенной роли в тензорной тригонометрии) понятие срединного рефлектора. Самостоятельным образом последний вводится как фундаментальный рефлектор-тензор пространства, задающий бинарную структуру тензорных тригонометрий, базирующихся на квадратичных метриках. В частности, он задаёт бинарную структуру квазиевклидовой тригонометрии. На основе этого понятия осуществляется развитие ротационной (синусно-косинусной) и деформационной (тангенсно-секансной) формы квазиевклидовой тензорной тригонометрии, то есть её моторной версии. В главе 6 с применением сферическо-гиперболической аналогии абстрактного и конкретного типов осуществлено построение сходной по форме псевдоевклидовой тензорной тригонометрии с тем же рефлектор-тензором. В главе 7 отдельно рассмотрена тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности простых матриц. В главах 8 и 9 введены алгебраическим способом общие геометрические и тригонометрические квадратичные нормы матричных объектов, обоснованные через соответствующие тригонометрические спектры и генеральные неравенства. В заключительных главах 10, 11 и 12 рассматривается тензорная тригонометрия в комплексных пространствах. Особое внимание уделено изучению движений в псевдоевклидовых пространствах, в том числе отдельно в пространстве Минковского.

## Глава 5. Тензорная евклидова и квазиевклидова тригонометрия

### § 5.1. Объекты тензорной тригонометрии и их пространственные взаимоотношения

Согласно аксиоме о континууме Кантора – Дедекинда [27, с. 99], аффинные геометрическое и арифметическое пространства одной и той же размерности находятся в отношении изоморфизма, что распространяется и на их метрические формы. Это является основанием для геометрической трактовки результатов, получаемых алгебраическим путём. Исходные элементы  $n$ -мерного аффинного пространства, по известному определению Вейля, есть точки и свободные векторы [11, с. 26–33; 1, с.358]. Их координаты задаются в каком-либо базисе в виде наборов  $n$  чисел. Точки и векторы образуют геометрические объекты. Последние подразделяются на централизованные и нецентрализованные. Централизованные объекты имеют точку приложения в центре координат. Сопоставим в алгебраической и геометрической форме простейшие линейные объекты аффинного пространства:

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| вектор $\mathbf{a}$  | – отрезок прямой,                 |
| образ $\langle \text{im } \mathbf{a} \rangle$                      | – прямая,                         |
| ядро $\langle \ker \mathbf{a}' \rangle$                            | – гиперплоскость,                 |
| $n \times r$ -линей $\mathbf{A}$ ( $\text{rang } \mathbf{A} = r$ ) | – $r$ -симплекс,                  |
| образ $\langle \text{im } \mathbf{A} \rangle$                      | – <i>планар</i> ранга $r$ ,       |
| ядро $\langle \ker \mathbf{A}' \rangle$                            | – <i>планар</i> ранга $(n - r)$ . |

Указанные объекты изучаемой тензорной тригонометрии имеют валентность 1. Валентность функций объектов может отличаться. Например, для внутренней и внешней мультиPLICATIONИ пары векторов соответствующие валентности равны 0 и 2:

$$\mathbf{a}'_1 \cdot \mathbf{a}_2 = c = \mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_2 = B = \{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}'_1\}'. \quad (151), (152)$$

Аффинные отношения планаров, включая параллельность, выражаются в виде:

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{\overrightarrow{A_1 A_1'}} = \overleftarrow{\overrightarrow{A_2 A_2'}} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} = \overrightarrow{\overleftarrow{A_2 A_2'}} \leftrightarrow \langle \ker A_1' \rangle \equiv \langle \ker A_2' \rangle, \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{\overrightarrow{A_1 A_1'}} \cdot A_2 = A_2 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} \cdot A_2 = Z = A_2' \cdot \overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} \leftrightarrow \langle \ker A_1' \rangle \subseteq \langle \ker A_2' \rangle, \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \ker A_1' \rangle \leftrightarrow A_1' \cdot A_2 = Z = A_2' \cdot A_1 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \subseteq \langle \ker A_2' \rangle \rightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (155)$$

$(r_1 + r_2 \leq n)$ , так как  $\langle \text{im } A \rangle \oplus \langle \ker A' \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle$ ;

$$\begin{aligned} \langle \ker A_1' \rangle \subseteq \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{\overrightarrow{A_2 A_2'}} \cdot \overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} = \overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \overrightarrow{\overleftarrow{A_2 A_2'}} \cdot \overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} = Z = \overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} \cdot \overrightarrow{\overleftarrow{A_2 A_2'}} \leftrightarrow \langle \ker A_2' \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \rightarrow \\ \rightarrow \langle \ker A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle = \mathbf{0}, \quad (r_1 + r_2 \geq n). \end{aligned} \quad (156)$$

С другой стороны, в евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  отношения (155) и (156) определяют взаимную ортогональность соответствующих планаров (отдельно образов и ядер  $A_1$ ,  $A_2$ ). Если линейные подпространства задаются нуль-простыми матрицами (см. § 1.6), то можно также использовать характеристические аффинные проекторы. Например,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{im } B_{p_1} \rangle \equiv \langle \text{im } B_{p_2} \rangle \\ \langle \ker B_{p_1} \rangle \equiv \langle \ker B_{p_2} \rangle \end{array} \right\} \leftrightarrow \overleftarrow{\overrightarrow{B_{p_1}}} = \overleftarrow{\overrightarrow{B_{p_2}}}, \quad (157)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{im } B_{p_2} \rangle \subseteq \langle \text{im } B_{p_1} \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{\overrightarrow{B_{p_1}}} \cdot B_{p_2} = B_{p_2} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \overrightarrow{\overleftarrow{B_{p_1}}} \cdot B_{p_2} = Z = B_{p_2}' \cdot \overrightarrow{\overleftarrow{B_{p_1}}} \leftrightarrow \langle \ker B_{p_1} \rangle \subseteq \langle \ker B_{p_2} \rangle. \end{aligned} \quad (158)$$

(В формулах с обнулением вместо проекторов могут использоваться матричные характеристические коэффициенты.) Дальнейшее естественное развитие отношений типа (155), (156) состоит в нижеследующих формулировках (159) и (160). В первом случае имеем:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{\overrightarrow{A_2 A_2'}} - \overleftarrow{\overrightarrow{A_1 A_1'}}) = r_1 + r_2 = \quad (159)$$

$$= \text{rang} (\overrightarrow{\overleftarrow{A_1 A_1'}} - \overrightarrow{\overleftarrow{A_2 A_2'}}) \leq n,$$

так как ядро матрицы  $(\overleftarrow{\overrightarrow{A_2 A_2'}} - \overleftarrow{\overrightarrow{A_1 A_1'}})$  есть ортогональное дополнение к прямой сумме образов  $\langle \text{im } A_1 \oplus \text{im } A_2 \rangle$  размерности  $s_1 = n - (r_1 + r_2)$ .

Во втором случае – в иной трактовке этой матрицы (а именно через дополнительные ортопроекторы) ядро ( $\overleftarrow{A_1 A_1}' - \overleftarrow{A_2 A_2}'$ ) есть пересечение ядер  $A_1'$  и  $A_2'$  размерности  $s_1 = (n - r_1) + (n - r_2) - n$ :

$$\begin{aligned} \langle \ker A_1' \cap \ker A_2' \rangle = 0 &\leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2}' - \overleftarrow{A_1 A_1}') = \\ &= 2n - (r_1 + r_2) = \text{rang} (\overrightarrow{A_1 A_1}' - \overrightarrow{A_2 A_2}) \leq n, \end{aligned} \quad (160)$$

так как ядро той же матрицы имеет размерность  $s_2 = (r_1 + r_2) - n$ . Соотношения (159) и (160) совместны тогда и только тогда, когда

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \oplus \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle \equiv \langle \ker A_1' \rangle \oplus \langle \ker A_2' \rangle.$$

При этом вышеуказанная матрица в круглых скобках – несингулярная.

Аналогичным образом имеем:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle \neq 0 \leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2}' - \overleftarrow{A_1 A_1}') < r_1 + r_2, \quad (161)$$

$$\langle \ker A_1' \cap \ker A_2' \rangle \neq 0 \leftrightarrow \text{rang} (\overrightarrow{A_2 A_2}' - \overrightarrow{A_1 A_1}') < 2n - (r_1 + r_2). \quad (162)$$

## § 5.2. Проективные тензорные синус, косинус и сферически ортогональные рефлекторы

Матричная характеристика

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{A_2 A_2}' - \overleftarrow{A_1 A_1}') = (\overrightarrow{A_1 A_1}' - \overrightarrow{A_2 A_2}') = \sin' \tilde{\Phi}_{12} = -\sin \tilde{\Phi}_{21} \quad (163)$$

определяется как *проективный* тензорный синус угла  $\tilde{\Phi}_{12}$  между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  или линеорами  $A_1$  и  $A_2$ . Проективный характер угла и соответственно функции отмечается специальным знаком *тильды* сверху:

$$\tilde{\Phi}_{12} = (\tilde{\Phi}_{12})' = -\tilde{\Phi}_{21}. \quad (164)$$

Согласно (163), угол между  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  аддитивно противоположен углу между  $\langle \ker A_1' \rangle$  и  $\langle \ker A_2' \rangle$ . Вместе они образуют единую *бинарную* структуру угла  $\tilde{\Phi}_{12}$ . Например, тензорный синус для пары векторов или прямых выражается как

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2}' - \overleftarrow{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1}') = \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2} - \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1}. \quad (165)$$

В частности, на *евклидовой* плоскости он имеет структуру:

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = \sin \varphi_{12} \cdot \sqrt{I_{2 \times 2}}, \quad \sqrt{I_{2 \times 2}} = R \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot R',$$

где  $\Phi_{12}$  отсчитывается против часовой стрелки (для правой системы декартовых координат),  $|\Phi_{12}| \leq \pi/2$ ;  $R$  – ортогональная модальная матрица.

Условие  $\sin \tilde{\Phi}_{12} = \tilde{\Phi}_{12} = Z$  тождественно отношению параллельности (153), в том числе для нецентризованных планаров:

$$\langle a_1 + im A_1 \rangle, \quad \langle a_2 + im A_2 \rangle.$$

Отношения типа (154) также имеют тождественные тригонометрические аналоги:

$$\langle im A_1 \rangle \subseteq \langle im A_2 \rangle \leftrightarrow \sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = + \sin \tilde{\Phi}_{12}, \quad (166)$$

$$\langle im A_2 \rangle \subseteq \langle im A_1 \rangle \leftrightarrow \sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = - \sin \tilde{\Phi}_{12}. \quad (167)$$

Действительно,

$$\sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = \overleftarrow{A_1 A_1}' \cdot \overrightarrow{A_2 A_2}' + \overleftarrow{A_2 A_2}' \cdot \overrightarrow{A_1 A_1}' = \overrightarrow{A_1 A_1}' \cdot \overleftarrow{A_2 A_2}' + \overrightarrow{A_2 A_2}' \cdot \overleftarrow{A_1 A_1}. \quad (168)$$

$$\text{Далее, например, } [\langle im A_2 \rangle \subseteq \langle im A_1 \rangle] \leftrightarrow [\overleftarrow{A_1 A_1}' \cdot A_2 = A_2] \leftrightarrow [\overleftarrow{A_1 A_1}' \cdot \overleftarrow{A_2 A_2}' = \\ = \overleftarrow{A_2 A_2}' = \overleftarrow{A_2 A_2}' \cdot \overleftarrow{A_1 A_1}' = \overleftarrow{A_2 A_2}' \cdot \overleftarrow{A_1 A_1}' \cdot \overleftarrow{A_2 A_2}] \leftrightarrow [\sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = - \sin \tilde{\Phi}_{12}].$$

В частном случае (166) тензорный синус есть симметричный проектор (собственные значения 0 и +1); в случае (167) он же – *антипроектор* (собственные значения 0 и -1).

В свою очередь, эквиранговые планары могут также задаваться сингулярной *квадратной* матрицей. При этом тензорный угол между  $\langle im B \rangle$  и  $\langle im B' \rangle$  аддитивно противоположен углу между  $\langle \ker B \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$ . Вместе они образуют единую бинарную структуру проективного тензорного угла  $\tilde{\Phi}_B$ . Аналогично (163) и (164) имеем:

$$\sin \tilde{\Phi}_B = (\overleftarrow{B'B} - \overleftarrow{BB'}) = (\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = \sin' \tilde{\Phi}_B = - \sin \tilde{\Phi}_{B'}, \quad (169)$$

$$\tilde{\Phi}_B = (\tilde{\Phi}_B)' = - \tilde{\Phi}_{B'}; \quad (170)$$

$$\sin \tilde{\Phi}_B = Z \leftrightarrow \tilde{\Phi}_B = \tilde{\Phi}_{B'} = Z \leftrightarrow B \in \langle Bm \rangle.$$

Это условие *тригонометрически* определяет нуль-нормальные матрицы, которые были введены в § 2.4.

Аналогично, тригонометрические отношения между образом и ядром матрицы характеризует проективный тензорный косинус того же угла:

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\Phi}_{12} &= (\overleftarrow{A_2 A_2}' - \overleftarrow{A_1 A_1}') = (\overleftarrow{A_1 A_1}' - \overleftarrow{A_2 A_2}') = (\overrightarrow{A_1 A_1}' + \overrightarrow{A_2 A_2}' - I) = \\ &= (I - \overrightarrow{A_1 A_1}' - \overrightarrow{A_2 A_2}') = \cos' \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{\Phi}_{21} = \cos (-\tilde{\Phi}_{12}), \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\Phi}_B &= (\overleftarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = (\overleftarrow{B'B} - \overrightarrow{BB'}) = (\overleftarrow{BB'} + \overleftarrow{B'B} - I) = \\ &= (I - \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = \cos' \tilde{\Phi}_B = \cos \tilde{\Phi}_{B'} = \cos (-\tilde{\Phi}_B). \end{aligned} \quad (172)$$

В частности, для пары векторов и прямых на евклидовой плоскости имеем:

$$\cos \tilde{\Phi}_{12} = \cos \varphi_{12} \sqrt{I_{2 \times 2}}, \quad \sqrt{I_{2 \times 2}} = R \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot R' \quad (\cos \varphi_{12} \geq 0).$$

Тригонометрические аналоги условий (155), (156) вытекают из формулы

$$\cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} + \overrightarrow{A_2 A_2'} \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \overrightarrow{A_2 A_2'} + \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'}. \quad (173)$$

Схема вывода аналогична (168).

$$\cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = + \cos \tilde{\Phi}_{12} \leftrightarrow (156), \quad (174)$$

$$\cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = - \cos \tilde{\Phi}_{12} \leftrightarrow (155). \quad (175)$$

Тензорные тригонометрические функции проективного угла в метрической форме характеризуют пространственные угловые отношения между линеорами или между планарами. В тензорном варианте косинус и синус основного и дополнительного (до согласованного с ним прямого угла) также равны между собой:

$$\cos \tilde{\Phi} = \sin (\tilde{\pi}/2 - \tilde{\Phi}), \quad \sin \tilde{\Phi} = \cos (\tilde{\pi}/2 - \tilde{\Phi}).$$

В аффинном пространстве угол не имеет количественного смысла за исключением, когда он нулевой или открытый. В евклидовом пространстве  $\langle E^n \rangle$  прямые тензорные углы образуются, например, парами планаров  $\langle \text{im } A \rangle$  и  $\langle \ker A' \rangle$ ,  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$ :

$$(\overleftarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_1 A_1'}) = \text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \cos \tilde{\Phi}_{12} - \sin \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{Z}_1, \quad (176)$$

$$(\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) = \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \cos \tilde{\Phi}_{12} + \sin \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{Z}_2; \quad (177)$$

$$(\overleftarrow{BB'} - \overrightarrow{BB'}) = \text{Ref}\{BB'\} = \cos \tilde{\Phi}_B - \sin \tilde{\Phi}_B = \cos \tilde{Z}_B, \quad (178)$$

$$(\overrightarrow{B'B} - \overleftarrow{B'B}) = \text{Ref}\{B'B\} = \cos \tilde{\Phi}_B + \sin \tilde{\Phi}_B = \cos \tilde{Z}_{B'}. \quad (179)$$

С одной стороны, это – синусы вышеуказанных прямых углов; с другой стороны, это – косинусы нулевых тензорных углов, соответствующих планарам  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  и  $\langle \text{im } B \rangle$ ,  $\langle \text{im } B' \rangle$ . Характеристические симметричные квадратные корни (176)–(179) типа  $\sqrt{I} = (\sqrt{I})'$  определяются как *сферически ортогональные рефлекторы*. В общем случае они обозначаются как  $\text{Ref } B_m$ , где  $B_m$  есть нуль-нормальная матрица.

Тензорные рефлекторы осуществляют операцию линейного отражения (рефлексии). При этом планар  $\langle im Bm \rangle$  есть линейное зеркало, от которого происходит ортогональное отражение. Некоторые частные случаи:

$$\sin \tilde{\Phi} = Z \leftrightarrow \cos \tilde{\Phi} = \sqrt{I},$$

$$\cos \tilde{\Phi} = Z \leftrightarrow \sin \tilde{\Phi} = \sqrt{I},$$

$$\cos \tilde{\Phi} = + I \leftrightarrow \text{rang } A = n, \quad \text{rang } B = n;$$

$$\cos \tilde{\Phi} = - I \leftrightarrow \text{rang } A = 0, \quad \text{rang } B = 0;$$

при этом  $\sin \tilde{\Phi} \neq \pm I$ .

Очевидны тождества:  $I \cdot I = I = I \cdot I$ , или

$$(\overleftarrow{A_1 A_1}' + \overrightarrow{A_1 A_1}) \cdot (\overleftarrow{A_2 A_2}' + \overrightarrow{A_2 A_2}') = I = (\overleftarrow{A_2 A_2}' + \overrightarrow{A_2 A_2}) \cdot (\overleftarrow{A_1 A_1}' + \overrightarrow{A_1 A_1}'), \quad (180)$$

$$(\overleftarrow{B B'} + \overrightarrow{B B'}) \cdot (\overleftarrow{B' B} + \overrightarrow{B' B}) = I = (\overleftarrow{B' B} + \overrightarrow{B' B}) \cdot (\overleftarrow{B B'} + \overrightarrow{B B'}). \quad (181)$$

Отсюда следуют тригонометрические формулы:

$$\cos^2 \tilde{\Phi} + \sin^2 \tilde{\Phi} = I, \quad (182)$$

$$\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi} = - \sin \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi}, \quad \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \sin^2 \tilde{\Phi} = \sin^2 \tilde{\Phi} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}, \quad (183), (184)$$

$$\cos^{2k} \tilde{\Phi} \cdot \sin^t \tilde{\Phi} = \sin^t \tilde{\Phi} \cdot \cos^{2k} \tilde{\Phi}, \quad \cos^t \tilde{\Phi} \cdot \sin^{2k} \tilde{\Phi} = \sin^{2k} \tilde{\Phi} \cdot \cos^t \tilde{\Phi}. \quad (185)$$

Далее при выводе тригонометрических формул можно также использовать таблицу умножения разнородных характеристических проекторов:

$$\overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B B'} = \overleftarrow{B B'} = \overleftarrow{B B'} \cdot \overleftarrow{B}, \quad \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B' B} = \overrightarrow{B' B} = \overrightarrow{B' B} \cdot \overrightarrow{B'},$$

$$\overleftarrow{B'} \cdot \overleftarrow{B' B} = \overleftarrow{B' B} = \overleftarrow{B' B} \cdot \overleftarrow{B}, \quad \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B B'} = \overrightarrow{B B'} = \overrightarrow{B B'} \cdot \overrightarrow{B},$$

$$\overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B' B} = \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B B'} \cdot \overleftarrow{B}, \quad \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B B'} = \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B' B} \cdot \overrightarrow{B},$$

$$\overleftarrow{B'} \cdot \overleftarrow{B B'} = \overleftarrow{B'} = \overleftarrow{B' B} \cdot \overleftarrow{B'}, \quad \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B' B} = \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B B'} \cdot \overrightarrow{B'}.$$

Проективный характер определённых выше тригонометрических функций показывают формулы:

$$\overleftarrow{B B'} = + \overleftarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi} = + \cos \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B'}, \quad (186)$$

$$\overleftarrow{B' B} = + \overleftarrow{B'} \cdot \cos \tilde{\Phi} = + \cos \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B}, \quad (187)$$

$$\overrightarrow{B' B} = - \overrightarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi} = - \cos \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B'}, \quad (188)$$

$$\overrightarrow{B B'} = - \overrightarrow{B'} \cdot \cos \tilde{\Phi} = - \cos \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B}, \quad (189)$$

$$\overleftarrow{B} - \overleftarrow{BB'} = (\sqrt{Z})_1 = + \overleftarrow{B} \cdot \sin \tilde{\Phi} = + \overleftarrow{B} \cdot \overrightarrow{BB'} = - \overleftarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B}, \quad (190)$$

$$\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B'B} = (\sqrt{Z})_2 = + \overrightarrow{B} \cdot \sin \tilde{\Phi} = - \overrightarrow{B'B} \cdot \overleftarrow{B} = + \overrightarrow{B} \cdot \overleftarrow{B'B}, \quad (191)$$

$$\overleftarrow{B'} - \overleftarrow{B'B} = - (\sqrt{Z})_2 = - \overleftarrow{B'} \cdot \sin \tilde{\Phi} = - \overleftarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{B'} = + \overleftarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B'B'}, \quad (192)$$

$$\overrightarrow{B'} - \overrightarrow{BB'} = - (\sqrt{Z})_1 = - \overrightarrow{B'} \cdot \sin \tilde{\Phi} = + \overrightarrow{B'} \cdot \overleftarrow{BB'} = - \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'}, \quad (193)$$

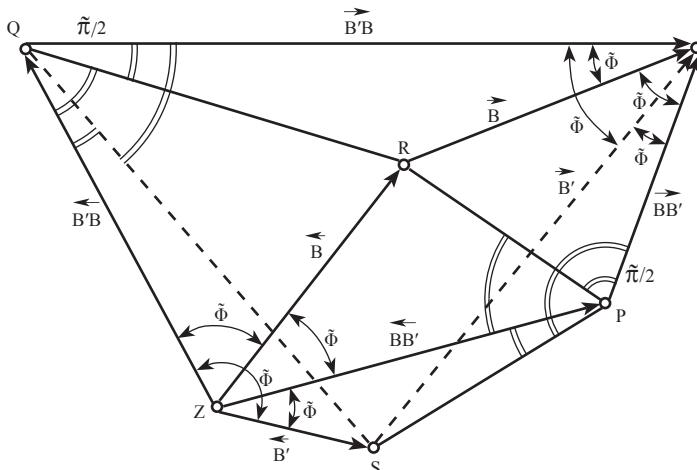
$$\overleftarrow{BB'} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} = \overrightarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B'} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B} \cdot \overrightarrow{B'}, \quad (194)$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} = \overrightarrow{B'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B}, \quad (195)$$

$$\overleftarrow{BB'} \cdot \overleftarrow{B'B} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}, \quad (196)$$

$$\overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{BB'} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}. \quad (197)$$

Проективные тригонометрические формулы и тензорные углы наглядно иллюстрирует *символический тензорный октаэдр*, образуемый восемью характеристическими проекторами в 2-х валентном евклидовом пространстве (рис.1). Для нуль-нормальной матрицы этот октаэдр вырождается в символический тензорный прямоугольный треугольник.



**Рис. 1.** Символический тензорный октаэдр из характеристических проекторов, иллюстрирующий тензорные углы.

### § 5.3. Проективные тензорные секанс, тангенс и аффинные рефлекторы

В свою очередь, тензорные функции секанса и тангенса от того же проективного угла определяются через аффинные или косогональные характеристические проекторы – § 1.2. Складывая (187) и (188), получаем

$$(\overset{\leftarrow}{B'} - \overset{\rightarrow}{B}) \cdot \cos \tilde{\Phi} = I = \cos \tilde{\Phi} \cdot (\overset{\leftarrow}{B'} - \overset{\rightarrow}{B}).$$

На основании этого соотношения матричная характеристика

$$\begin{aligned} \sec \tilde{\Phi}_B &= (\overset{\leftarrow}{B'} - \overset{\rightarrow}{B}) = (\overset{\leftarrow}{B} - \overset{\rightarrow}{B'}) = (\overset{\leftarrow}{B} + \overset{\leftarrow}{B'} - I) = (I - \overset{\rightarrow}{B} - \overset{\rightarrow}{B'}) = \\ &= \sec' \tilde{\Phi}_B = \sec \tilde{\Phi}_{B'} = \sec (-\tilde{\Phi}_B) = [(\overset{\leftarrow}{B'} - \overset{\rightarrow}{B}] = [\overset{\leftarrow}{B} - (\overset{\rightarrow}{B}')] \end{aligned} \quad (198)$$

определяется как проективный тензорный секанс угла  $\tilde{\Phi}_B$  между планарами  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$ . Согласно (172), тензорный косинус – несингularityная матрица тогда и только тогда, когда  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle = \mathbf{0}$ , то есть когда  $B$  – нуль-простая матрица. Поэтому имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_{Bp} = \cos^{-1} \tilde{\Phi}_{Bp}, \quad \sec \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = I = \cos \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi}; \quad (199)$$

$$\sec \tilde{\Phi}_B = \cos^+ \tilde{\Phi}_B, \quad \sec \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = \overset{\leftarrow}{\cos \tilde{\Phi}} = \cos \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi}. \quad (200)$$

В последнем случае подразумевается, что исходная матрица может быть нуль-дефектной, а характеристические аффинные проекторы при этом же могут не существовать. Тогда на подпространстве  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle$  косинус и квазисеканс – оба вместе нулевые. Зато для нуль-дефектной матрицы косинус угла между подпространствами  $\langle \text{im } B^{s_0} \rangle$  и  $\langle \text{im } B'^{s_0} \rangle$  всегда несингularityный. В свою очередь, синус несингularityный тогда и только тогда, когда

$$\det \sin \tilde{\Phi}_B \neq 0 \Leftrightarrow \langle \text{im } B \rangle \oplus \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle \quad (r_B = n/2). \quad (201)$$

В случае задания тензорного проективного угла линеорами  $A_1$  и  $A_2$  это же соответствует объединению условий (159) и (160). Ввиду этого квазисеканс в общем случае определяется через квазиобратную матрицу

$$\cosec \tilde{\Phi}_B = \sin^+ \tilde{\Phi}_B = \cosec' \tilde{\Phi}_B = -\cosec \tilde{\Phi}_{B'} = -\cosec (-\tilde{\Phi}_B). \quad (202)$$

Вычитая (186) из (187), получаем

$$\sin \tilde{\Phi}_B = -\cos \tilde{\Phi}_B \cdot (\overset{\leftarrow}{B'} - \overset{\rightarrow}{B}) = +(\overset{\leftarrow}{B'} - \overset{\rightarrow}{B}) \cdot \cos \tilde{\Phi}_B.$$

На основании этого соотношения матричная характеристика

$$\begin{aligned} i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B &= (\overleftarrow{B}' - \overleftarrow{B}) = (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B}') = [(\overleftarrow{B}')' - \overleftarrow{B}] = [\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{B})'] = \\ &= -i \cdot \operatorname{tg}' \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_{B'} = -i \cdot \operatorname{tg} (-\tilde{\Phi}_B) \end{aligned} \quad (203)$$

определяется как проективный тензорный тангенс угла  $\tilde{\Phi}_B$ . Принимаемая форма проективного тангенса обусловлена тем, что это кососимметрическая матрица; её ненулевые собственные значения  $\mu_j = \pm i \cdot \operatorname{tg} \varphi_j$ . Кроме того, тот же тангенс выражается тригонометрической формулой

$$i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi} = + \sin \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi} = - \sec \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi}. \quad (204)$$

В частности, для пары векторов и прямых с учётом (151), (152) имеем:

$$i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B = \frac{B' - B}{\operatorname{tr} B} = \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1' - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_2} = i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_{12}. \quad (205)$$

Квазикотангенс определяется для общего случая матрицей

$$i \cdot \operatorname{ctg} \tilde{\Phi}_B = i \cdot \operatorname{tg}^+ \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \operatorname{ctg}' \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \operatorname{ctg} \tilde{\Phi}_{B'} = -i \cdot \operatorname{ctg} (-\tilde{\Phi}_B). \quad (206)$$

Очевидно тождество

$$(\overleftarrow{B} + \overrightarrow{B}) \cdot (\overleftarrow{B}' + \overrightarrow{B}') = I = (\overleftarrow{B}' + \overrightarrow{B}') \cdot (\overleftarrow{B} + \overrightarrow{B}). \quad (207)$$

Отсюда следуют тригонометрические формулы:

$$\sec^2 \tilde{\Phi} - \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi} = I = \sec^2 \tilde{\Phi} + (i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi})^2, \quad (208)$$

$$\sec \tilde{\Phi} \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi} = -\operatorname{tg} \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi}, \quad (209)$$

$$\sec^2 \tilde{\Phi} \cdot \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi} = \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi} \cdot \sec^2 \tilde{\Phi}. \quad (210)$$

**Правило №1.** Квадраты и любые чётные степени тензорных тригонометрических функций коммутативны между собой и с характеристическими проекторами, когда они относятся к одной и той же паре линеоров или планаров.

Аналогично (176)–(179), но для нуль-простой матрицы, определяются аффинные рефлекторы:

$$(\overleftarrow{B} - \overrightarrow{B}) = \operatorname{Ref}\{B\} = \sec \tilde{\Phi} - i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}, \quad (211)$$

$$(\overleftarrow{B}' - \overrightarrow{B}') = \operatorname{Ref}\{B'\} = \sec \tilde{\Phi} + i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi} = \operatorname{Ref}'\{B\}. \quad (212)$$

В случае пространства с евклидовой метрикой они есть сферически косоугольные рефлекторы и вместе с тем – характеристические квадратные корни типа  $\sqrt{I}$ . Если тензорный угол между  $\langle \operatorname{im} B \rangle$  и  $\langle \operatorname{im} B' \rangle$  ненулевой, то корни (211), (212) обязательно несимметричны.

В самом общем случае тензорные рефлекторы могут обозначаться как  $\text{Ref } \{\text{Br}\}$ , где  $\text{Br}$  – нуль-простая матрица. При этом планар  $\langle \text{im Br} \rangle$  есть линейное зеркало, от которого происходит отражение параллельно планару  $\langle \ker \text{Br} \rangle$ .

#### § 5.4. Сопоставление двух способов задания тензорных углов – через прямоугольные и через квадратные сингулярные матрицы

Возникает вопрос, когда проективный тензорный угол и его тригонометрические функции, определяемые либо через  $A_1$  и  $A_2$ , либо через  $B$ , тождественны? Пусть в соответствии с (151) и (152) имеем:

$$B = A_1 \cdot A_2', \quad B' = A_2 \cdot A_1', \quad (213), (214)$$

$$C = A_1' \cdot A_2, \quad C' = A_2' \cdot A_1. \quad (215), (216)$$

Прежде всего отметим, что матрицы  $A_1$  и  $A_2$  здесь необходимо имеют одинаковый размер. Из равенства тензорных углов следует равенство всех одноимённых ортопроекторов и обратно:

$$\tilde{\Phi}_{12} = \tilde{\Phi}_B \leftrightarrow \begin{cases} \sin \tilde{\Phi}_{12} = \sin \tilde{\Phi}_B \\ \cos \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{\Phi}_B \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_{12} = \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B \\ \sec \tilde{\Phi}_{12} = \sec \tilde{\Phi}_B \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \overleftrightarrow{A_1 A_2'} = \overleftrightarrow{B B'} \\ \overleftrightarrow{A_2 A_2'} = \overleftrightarrow{B' B} \end{cases}.$$

(Но  $\overleftrightarrow{A_1 A_2'} = B$  справедливо по исходному определению  $A_1 A_2' = B$ ; это дополнительное соотношение определяется только фактом существования косопроекторов – см. § 2.1.) В свою очередь, равенство ортопроекторов тождественно взаимосвязанным условиям:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } B \rangle \quad \overrightarrow{\text{im } A_1} \cap \overleftarrow{\text{im } A_2'} = \emptyset \quad (217), (218)$$

$$\langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \quad \overrightarrow{\text{im } A_2} \cap \overleftarrow{\text{im } A_1'} = \emptyset. \quad (219), (220)$$

Вначале рассмотрим условие (217), тождественное (220):

$$\langle \text{im } B \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \text{im } A_2' \rangle \leftarrow A_1 \cdot A_2' = B,$$

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \text{im } A_2' \rangle \oplus \ker A_2'.$$

Отсюда следует, что выполнение (217) тождественно двум условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \langle \text{im } A_2' \rangle \cap \langle \ker A_1 \rangle = \emptyset, \\ \langle \ker A_2 \rangle \subset \langle \ker A_1 \rangle. \end{array} \right\} \quad (221)$$

Аналогичный подход применим к условию (219), тождественному (218):

$$\left. \begin{array}{l} \langle \text{im } A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2 \rangle = \mathbf{0}, \\ \langle \ker A_1 \rangle \subset \langle \ker A_2 \rangle. \end{array} \right\} \quad (222)$$

То есть выполнение двух независимых условий (217) и (219) равносильно тому, что

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1'A_1} = \overrightarrow{A_2'A_2} &\leftrightarrow \overleftarrow{A_1'A_1} = \overleftarrow{A_2'A_2} \leftrightarrow \langle \text{im } A_1' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2' \rangle \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle, \end{aligned} \quad (223)$$

где необходимо  $r_1 = r_2 \leq m$ .

Ответ на поставленный выше вопрос заключается в выполнении необходимого и достаточного условия (223). В частности, оно соблюдается, когда  $r_1 = r_2 = r = m$ . Тогда

$$\langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \text{im } A_1' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2' \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^r \rangle.$$

Этот упрощённый вариант, как правило, подразумевается при использовании внешних и внутренних произведений типа (213) – (216), то есть при условии:

$$r_1 = r_2 = r = m < n. \quad (224)$$

Например, такой вариант имеет место для пары векторов. Согласно (120) и (213) – (216), имеем:

$$k(B, r) = k(B', r) = \det C = \det C'. \quad (225)$$

При условии (224) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{\overrightarrow{A_1'A_1}} = \overleftarrow{\overrightarrow{B'B'}}, \\ \overleftarrow{\overrightarrow{A_2'A_2}} = \overleftarrow{\overrightarrow{B'B}}. \end{array} \right\} \quad (226)$$

Для нуль-простой матрицы  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle = \mathbf{0}$ ;  $k(B, r) = \det C \neq 0$ . В частности, для нуль-нормальной матрицы имеем  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle$  и в соответствии с (97) получаем:

$$k(BB', r) = k(B'B, r) = k^2(B, r) = \det^2 C > 0.$$

Для нуль-дефектной матрицы имеем:  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle \neq \mathbf{0}$ ;  $k(B, r) = \det C = 0$ . Скалярная характеристика  $\det C = \det(A_1'A_2)$

в евклидовом пространстве, при условии (224), играет также роль критерия хотя бы частичной ортогональности линеоров или планаров. С другой стороны, определитель  $\det G = \det [(A_1|A_2)'(A_1|A_2)]$  в аффинном пространстве играет роль критерия хотя бы частичной их параллельности.

$$\det G = 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle \neq \mathbf{0}, \quad (227)$$

$$\det G \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0}, \quad (228)$$

$$\det C = 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle \neq \mathbf{0} \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \cap \langle \ker A_1' \rangle \neq \mathbf{0}, \quad (229)$$

$$\det C \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle = \mathbf{0} \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \cap \langle \ker A_1' \rangle = \mathbf{0}, \quad (230)$$

где для евклидова пространства  $\langle \ker A' \rangle \equiv \langle \text{im } A \rangle^\perp$ .

Полная параллельность линеоров или планаров отвечает нуль-нормальной матрице. Согласно (97) и (132), это тождественно соотношению:

$$\begin{aligned} |\det C| &= |k(Bm, r)| = \sqrt{k(Bm, Bm', r)} = \mathcal{M}t(r)(A_1 \cdot A_2') = \mathcal{M}t(r)A_1 \cdot \mathcal{M}t(r)A_2 = \\ &= \sqrt{\det A_1' A_1} \cdot \sqrt{\det A_2' A_2}. \end{aligned} \quad (231)$$

С учётом (224) это же соответствует отношению параллельности (153). Впоследствии формула (231) получит *тригонометрическую* трактовку.

В свою очередь, полная ортогональность линеоров или планаров отвечает нильпотентной матрице 2-го порядка:  $B^2 = Z$  ( $C = Z$ ). С учётом (224) это же в евклидовом пространстве соответствует отношению ортогональности (155):

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle &\equiv \langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \ker B \rangle \equiv \langle \ker A_2' \rangle \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \ker B' \rangle \equiv \langle \ker A_1' \rangle. \end{aligned}$$

Тензорный угол  $\tilde{\Phi}_{12}$  и его тригонометрические функции имеют, конечно, более общий характер, нежели  $\tilde{\Phi}_B$  и его функции, так как они допускают исходно использование матриц  $A_1$  и  $A_2$  размера  $n \times r_1$  и  $n \times r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  не обязательно равны. Например, если  $r_2 \leq r_1$ , то общая параллельность линеоров  $A_1$  и  $A_2$  сводится к отношению (154). С другой стороны, при любом соотношении  $r_1$  и  $r_2$  общая ортогональность линеоров  $A_1$  и  $A_2$  сводится к отношению (155). Тождественность  $\tilde{\Phi}_{12}$  и  $\tilde{\Phi}_B$  определяется условием (223).

В тензорной тригонометрии в зависимости от конкретных задач применяется та или иная форма представления тензорных углов и их функций.

### § 5.5. Канонические монобинарные клеточные формы сферических тензорных тригонометрических функций и рефлекторов

Параллельность и ортогональность линейных объектов являются только крайними случаями для тензорных углов между ними. Далее, чтобы выполнить полный анализ такого рода отношений, нужно вышеуказанные проективные тригонометрические функции представить в канонической форме, найти их собственные значения и установить информативные скалярные характеристики тензорного угла. Обратимся к разностям ортопроекторов типа (163), которые выражают проективный синус в двух вариантах. Согласно (182) – (184), собственные значения синуса и косинуса суть вещественные числа, находящиеся в интервале  $-1 \div +1$ :

$$\mu_{\sin}^2 + \mu_{\cos}^2 = 1. \quad (232)$$

В евклидовом пространстве указанные собственные значения связаны с некоторыми характеристическими скалярными углами. Обратим внимание на то, что используемые в обоих вариантах разностей (163) характеристические проекторы попарно ортогональны. Ввиду симметричности этих проекторов им же соответствуют четыре собственных подпространства:  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ ,  $\langle \ker A_1' \rangle$ ,  $\langle \ker A_2' \rangle$ . Причём имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \ker A_1' \rangle, \quad \langle \text{im } A_1 \rangle \oplus \langle \ker A_1' \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle, \\ \langle \text{im } A_2 \rangle \perp \langle \ker A_2' \rangle, \quad \langle \text{im } A_2 \rangle \oplus \langle \ker A_2' \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle. \end{array} \right\} \quad (233)$$

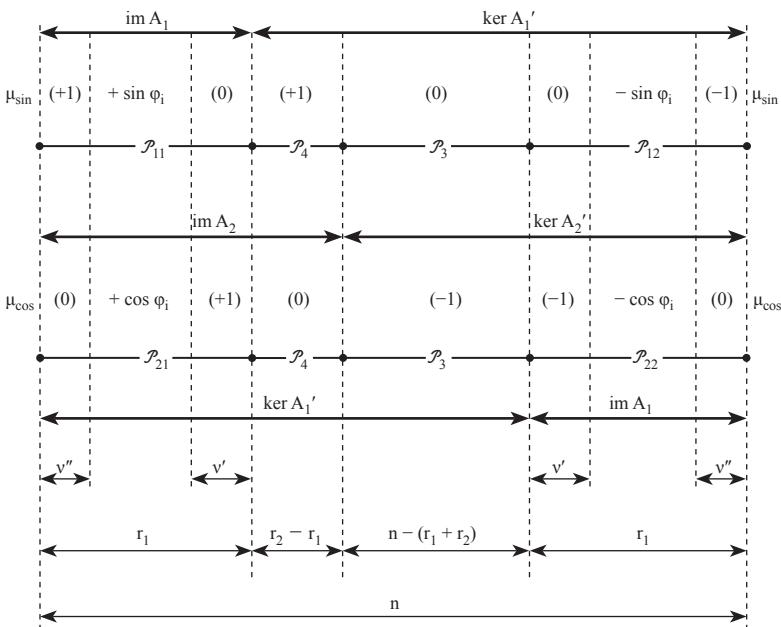
В первом варианте (163) синус рассматривается на подпространстве  $\langle \text{im } A_1 \cup \text{im } A_2 \rangle$ , а во втором варианте – на  $\langle \ker A_1' \cup \ker A_2' \rangle$ . Напротив, в первом варианте (171) косинус рассматривается на подпространстве  $\langle \text{im } A_2 \cup \ker A_1' \rangle$ , а во втором варианте – на  $\langle \text{im } A_1 \cup \ker A_2' \rangle$ . Пусть для определённости:  $r_2 \geq r_1$ ,  $r_1 + r_2 \leq n$ . Исходное евклидово пространство по отношению к вышеуказанным вариантам разностей проекторов распадается в общем случае на четыре базисных подпространства как в синусном, так и в косинусном вариантах (рис. 2). Эти подпространства попарно ортогональны при условиях:

$$\sin \varphi \neq \pm 1, \quad \cos \varphi \neq \pm 1. \quad (234)$$

В свою очередь, при данных условиях подпространства пересечений и их размерности выражаются в виде:

$$\langle \mathcal{P}_3 \rangle \equiv \langle \ker A_1' \cap \ker A_2' \rangle, \quad \dim \langle \mathcal{P}_3 \rangle = n - (r_1 + r_2);$$

$$\langle \mathcal{P}_4 \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1' \rangle, \quad \dim \langle \mathcal{P}_4 \rangle = r_2 - r_1.$$



**Рис. 2.** Распределение собственных значений проективных тензорных синуса и косинуса по характеристическим подпространствам:

$\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_3$  и  $\mathcal{P}_4$  – в синусном варианте;  
 $\mathcal{P}_{21}, \mathcal{P}_{22}, \mathcal{P}_3$  и  $\mathcal{P}_4$  – в косинусном варианте  
(условно принято, что  $r_2 \geq r_1, r_1 + r_2 \leq n$ ).

Выделим *собственное бинарное тригонометрическое подпространство* в двух вариантах его бинарного разложения на прямые ортогональные суммы – синусном и косинусном:

$$\langle \mathcal{P}_{11} \oplus \mathcal{P}_{12} \rangle \equiv \langle \mathcal{P}_{21} \oplus \mathcal{P}_{22} \rangle. \quad (235)$$

(Оно имеет всегда чётную размерность  $2\tau$  – *тригонометрический ранг угла*.) Здесь  $\tau = \min \{r_1, r_2, (n - r_1), (n - r_2)\}$  – количество бинарных собственных углов  $\phi_i$ . Но в данном случае  $\tau = r_1$ . Собственные значения тригонометрических функций во *взаимных* подпространствах (235) попарно равны по абсолютной величине, так как стороны собственных углов в силу (233) попарно ортогональны. Но эти собственные значения противоположны по знаку, так как порядки следования проекторов в обоих вариантах (163) и (171) взаимно обратны. Ввиду симметричности проективного косинуса и синуса последние приводятся к диагональной форме посредством ортогонального

модального преобразования. Для того чтобы собственные значения углов и функций имели тригонометрический смысл, здесь используется евклидово пространство с заданием в нём исходного декартова базиса. Каждой  $i$ -й бинарной тригонометрической клетке в (235) соответствует  $i$ -я собственная евклидова плоскость. На этой плоскости имеется пара ортогональных собственных вектор-осей тензорного косинуса  $u_i$  и  $v_i$ . Им отвечают собственные значения косинуса « $+\cos \varphi_i$ » и « $-\cos \varphi_i$ » ( $-\pi/2 \leq \varphi_i \leq +\pi/2$ ), где  $\varphi_i$  – собственные значения тензорных углов между планарами (а не линеорами!). Эти, пока неориентированные собственные векторы задают 1-ю и 2-ю декартовы оси на собственной плоскости. С целью придания канонической формы проективным тригонометрическим функциям расположим тригонометрические клетки вдоль главной диагонали в направлении увеличения значений  $|\cos \varphi_i|$ ; затем по диагонали расположим моноклетки, соответствующие  $\langle P_3 \rangle$  и  $\langle P_4 \rangle$ . Далее установим парное соответствие между исходными и новыми декартовыми осями:  $\langle x_1 \leftrightarrow u_1, x_2 \leftrightarrow v_1 \rangle, \dots, \langle x_{2i-1} \leftrightarrow u_i, x_{2i} \leftrightarrow v_i \rangle, \dots, \langle x_{2t-1} \leftrightarrow u_t, x_{2t} \leftrightarrow v_t \rangle, \dots$ . Выбираем ориентацию новых осей так, чтобы углы между ними в этих парах были острыми.

Согласно (232), квадраты проективных функций в пределах тригонометрической  $2 \times 2$ -клетки имеют парные собственные значения. В силу условия коммутативности квадратов (184) диагональные формы квадратов синуса и косинуса реализуются в одном и том же декартовом базисе:

$$\sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi_i & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi_i & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi_i \end{pmatrix}.$$

$\langle P_3 \rangle$        $\langle P_4 \rangle$

Из условия антикоммутативности проективных функций (183) и их симметричности следует, что в базисе диагонального косинуса они имеют канонические формы:

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & +\sin \varphi_i \\ +\sin \varphi_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \cos \tilde{\Phi}_{12} = \begin{pmatrix} +\cos \varphi_i & 0 \\ 0 & -\cos \varphi_i \end{pmatrix}. \quad (236), (237)$$

$\langle P_3 \rangle$        $\langle P_4 \rangle$

(r<sub>2</sub> > r<sub>1</sub>)      (r<sub>1</sub> + r<sub>2</sub> < n)

В (236) из двух возможных контрадиагональных форм синуса – положительной и отрицательной выбрана первая, что соответствует определениям (163), (171). См. также об этих простейших формах далее в § 7.2. Заметим, что для угла  $\tilde{\Phi}_B$  подпространство  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$  нулевое, а  $\dim \langle \mathcal{P}_3 \rangle = |n - 2r|$ . Согласно (199) и (204), имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_B = \begin{array}{|c|c|} \hline & +\sec \varphi_i & 0 \\ \hline +\sec \varphi_i & 0 & -\sec \varphi_i \\ \hline 0 & -\sec \varphi_i & \\ \hline \end{array}, \quad i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\operatorname{tg} \varphi_i \\ \hline +\operatorname{tg} \varphi_i & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline \end{array}. \quad (238), (239)$$

(2r < n)  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  0

Формулы (236)–(239) представляют проективные тригонометрические функции в канонической W-форме (§ 4.1) в ориентированном базисе диагонального косинуса. Их базис определяется как *тригонометрический*. При тех же условиях (234) имеем:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_i} &= \overrightarrow{\{\cos^2 \tilde{\Phi} - \cos^2 \varphi_i \cdot I\}} = \overrightarrow{\{\sin^2 \tilde{\Phi} - \sin^2 \varphi_i \cdot I\}} = \overrightarrow{S_{i1}} + \overrightarrow{S_{i2}}; \\ \overrightarrow{S_{i1}} &= \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi} - \cos \varphi_i \cdot I\}}, \quad \overrightarrow{S_{i2}} = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi} + \cos \varphi_i \cdot I\}}; \\ \overrightarrow{S_{(3)}} &= \sin \tilde{\Phi}; \quad \overrightarrow{S_{(4)}} = \cos \tilde{\Phi}. \end{aligned} \quad (240)$$

Это суть ортопроекторы, осуществляющие проецирование на характеристические подпространства:  $i$ -я тригонометрическая клетка, оси  $u_i$  и  $v_i$ ,  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ . Они же своими базисными столбцами (строками) задают эти подпространства. Если некоторые  $\varphi_i$  совпадают, то  $i$ -я тригонометрическая клетка расширяется; требуется ортогонализация однородных осей для восстановления бинарной структуры.

Возвратимся к условиям (234). Они были приняты ранее для упрощения процесса разбиения на характеристические базисные подпространства. Но пусть, например,  $\cos \varphi_i = +1$  ( $\sin \varphi_i = 0$ ) с кратностью  $v'$  на  $\langle \mathcal{P}_{21} \rangle$  (рис.2);  $v' = \dim \langle \operatorname{im} A_1 \cap \operatorname{im} A_2 \rangle$ . Тогда этому значению косинуса, в свою очередь, на  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$  соответствует  $\cos \varphi_i = -1$  с той же кратностью  $v'$  (в силу обратного порядка расположения проекторов). Собственное значение косинуса « $-1$ » теперь относится и к  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$ , как ранее, и к  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$ . Для отделения собственного тригонометрического подпространства от  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  нужно ортогонализовать собственные векторы косинуса с  $\mu = -1$ . При этом устанавливается парная ортогональность  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$ . Аналогично поступают, если на  $\langle \mathcal{P}_{11} \rangle$  окажутся значения  $\sin \varphi_i = +1$  ( $\cos \varphi_i = 0$ ) с кратностью  $v'' = \dim \langle \operatorname{im} A_1 \cap \ker A_2 \rangle$  (рис.2). Тогда на  $\langle \mathcal{P}_{12} \rangle$  им соответствуют  $\sin \varphi_i = -1$  с той же кратностью  $v''$ . Собственное значение синуса « $+1$ » теперь относится и к  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ , как ранее,

и к  $\langle \mathcal{P}_{11} \rangle$ . Для отделения собственного тригонометрического подпространства от  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$  нужно ортогонализовать собственные векторы синуса с  $\mu = +1$ . При этом устанавливается парная ортогональность  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ .

Кроме того, если вопреки принятому ранее,  $r_1 > r_2$ , то  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle$ . Если же  $r_1 + r_2 > n$ , то  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \cap \text{im } A_2 \rangle$ . Сообразно этому изменяют знаки единичных собственных значений на  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ .

Используемые в работе базисы суть правые, в том числе исходный ортогональный базис в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  ( $\det \{R\} = +1$ ), а также ортогональные базисы на собственных плоскостях  $\langle u_i, v_i \rangle$ , составляющие вместе тригонометрический базис (его бинарную часть). В тригонометрическом базисе находят с точностью до знака контрадиагональные значения синуса, согласно форме (236). При этом знаки при косинусе определяются строго в соответствии с формой (237). Тогда величина и знак угла  $\varphi_i$  строго определяют его положение в интервале  $[-\pi/2 \div +\pi/2]$ . Направление отсчёта скалярного угла  $\varphi_i$  на собственной плоскости с правым декартовым базисом, как общепринято, выбрано против часовой стрелки. Заметим, что вышеуказанный интервал изменения собственных значений углов  $\varphi_i$  относится к угловым отношениям планаров (а не линеоров!). В том же тригонометрическом базисе (то есть базисе диагонального косинуса) определяются канонические формы характеристических ортогональных (176), (177) и аффинных (211), (212) рефлекторов:

$$\text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \begin{pmatrix} +\cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \begin{pmatrix} +\cos \varphi_i & +\sin \varphi_i \\ +\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad (241)$$

$$\text{Ref}\{B\} = \begin{pmatrix} +\sec \varphi_i & +\operatorname{tg} \varphi_i \\ -\operatorname{tg} \varphi_i & -\sec \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{Ref}\{B'\} = \begin{pmatrix} +\sec \varphi_i & -\operatorname{tg} \varphi_i \\ +\operatorname{tg} \varphi_i & -\sec \varphi_i \end{pmatrix}. \quad (242)$$

## § 5.6. Ротационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа

В дальнейшем при выводе ряда формул и неравенств, относящихся к тензорной тригонометрии, будет довольно широко использоваться *принцип бинарности*. Поясним его. Если простые вещественные матрицы  $P_1$  и  $P_2$  антисимметричны, то тогда и только тогда они представляются в одном и том же *специальном* базисе в вещественных монобинарных клеточных формах  $W_1$  и  $W_2$  (§ 4.1), антисимметричных по общим собственным подпространствам размерности 1 и 2 (см. также далее в § 7.2). При этом в каких-либо базисах *любая аналитическая функция*  $F(P_1, P_2)$  *выражается в той же форме, что и функция*  $F(W_1, W_2)$ . В вышеуказанном специальном базисе функция  $F(P_1, P_2)$  представляется прямой суммой аналогичных собственных функций от монарных и бинарных клеток матриц  $W_1$  и  $W_2$ . В свою очередь, скалярные инварианты  $F(P_1, P_2)$  равны произведению собственных инвариантов по клеткам. Заметим, что для аналитических функций от нескольких простых, попарно коммутативных матриц-аргументов  $P_i$  в теории матриц, в том числе и в изучаемой тензорной тригонометрии, используется аналогичный *принцип монарности*. Принцип бинарности исходит из коммутативности именно квадратов простых матриц. Оба данных принципа позволяют непосредственным образом переносить аналитические операции и их результаты с простейшей клеточной формы на исходные матрицы или на их аналитические функции. Пусть  $P_1 = \cos \tilde{\Phi}$ ,  $P_2 = \sin \tilde{\Phi}$  ( $r_1 = r_2 \rightarrow \langle \mathcal{P}_4 \rangle = 0$ ). Составим некоторую аналитическую функцию от них с учётом (176), (177):

$$F(P_1, P_2) = (P_1 + P_2) \cdot (P_1 - P_2) = \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\},$$

где  $\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2$ , то есть  $A_1$  и  $A_2$  – *эквиранговые линеоры*.

Её  $W$ -форма в ортонормированном базисе  $\{R_W\}$  исходя из бинарных произведений по  $2 \times 2$ -клеткам есть ортогональная ротационная матрица-функция:

$$\begin{array}{c} \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \\ \left( \begin{array}{cc} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \end{array} \right) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \\ \left( \begin{array}{cc} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \text{Rot } 2\Phi_{12} \\ \left( \begin{array}{cc} \cos 2\varphi_i & -\sin 2\varphi_i \\ \sin 2\varphi_i & \cos 2\varphi_i \end{array} \right) \end{array}.$$

При этом подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  в указанном произведении всегда соответствует диагонально-единичный блок. Полученная  $2 \times 2$ -матрица осуществляет ротацию на собственной плоскости на угол  $2\varphi_i$  против часовой стрелки. В целом матрица-функция осуществляет сферическую ротацию на тензорный угол  $2\Phi_{12}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} &= (\cos \tilde{\Phi}_{12} + \sin \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\cos \tilde{\Phi}_{12} - \sin \tilde{\Phi}_{12}) = \\ &= (\cos^2 \tilde{\Phi}_{12} - \sin^2 \tilde{\Phi}_{12}) + (2\sin \tilde{\Phi}_{12} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}) = \\ &= \cos 2\Phi_{12} + i \cdot \sin 2\Phi_{12} = \text{Rot} 2\Phi_{12}, \end{aligned} \quad (243)$$

$$\text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \text{Rot}' 2\Phi_{12} = \text{Rot} (-2\Phi_{12}), \quad (244)$$

где приставка «Rot» обозначает ротационную матрицу-функцию от *моторного* тензорного сферического угла  $\Phi$ . В отличие от угла проективного типа  $\tilde{\Phi}$  в его обозначении знак *тильды* сверху отсутствует. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \cos^2 \tilde{\Phi} &= \cos^2 \Phi, \quad \sin^2 \tilde{\Phi} = \sin^2 \Phi \quad (\text{см. Правило №1}); \\ \sin \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} &= \sin \Phi \cdot \cos \Phi = \cos \Phi \cdot \sin \Phi = -\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi}. \end{aligned}$$

Тригонометрические функции от  $\Phi$  относятся также к моторному типу. Тензорная ротация осуществляется в тригонометрическом подпространстве размерности  $2\tau_R$ , где  $\tau_R = r_1 - v'$  (рис.2) относительно его ортогонального дополнения размерности  $(n - 2\tau_R)$ , то есть обобщённой оси ротации. Ортогональная матрица  $R$  является *ротационной*, если  $\det R = +1$ , и является *рефлексивной*, если  $R = R'$ . Оба эти качества могут совмещаться, а могут и нет. В свою очередь, ротационная матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$  теоретически вычисляется как *тригонометрический квадратный корень* из (243):

$$\text{Rot } \Phi_{12} = [\text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\}]^{1/2}. \quad (245)$$

Формула (243) наглядно интерпретируется так. *Ортогональная рефлексия от  $\langle i m A_1 \rangle$  и затем от  $\langle i m A_2 \rangle$  тождественна ротации на удвоенный угол между  $\langle i m A_1 \rangle$  и  $\langle i m A_2 \rangle$ .* Это очевидно для пары векторов или пары прямых. В частности, для пары неориентированных векторов или планаров ранга 1 имеем ротационную матрицу ( $\tau = 1$ ):

$$\begin{aligned} \text{Rot } \Phi_{12} &= [(I - 2 \cdot \overleftarrow{a_2 a_2'}) \cdot (I - 2 \cdot \overleftarrow{a_1 a_1'})]^{1/2} = \\ &= \left[ I - 2 \cdot \left( \frac{\overrightarrow{a_1 a_1'}}{\overrightarrow{a_1' a_1}} + \frac{\overrightarrow{a_2 a_2'}}{\overrightarrow{a_2' a_2}} \right) + 4\cos^2 \Phi_{12} \cdot \frac{\overrightarrow{a_2 a_1'}}{\overrightarrow{a_1' a_2}} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (246)$$

$$\text{где } \overleftarrow{aa'} = \frac{\overrightarrow{aa'}}{\overrightarrow{a' a}}, \quad \overleftarrow{a_2 a_1'} = \frac{\overrightarrow{a_2 a_1'}}{\overrightarrow{a_1' a_2}}, \text{ в том числе при } a = e: \overleftarrow{ee'} = \overleftarrow{ee'}.$$

Для *ориентированных* векторов или линеоров принятый ранее для собственного угла  $\Phi_i$  допустимый интервал  $[-\pi/2 \div +\pi/2]$  занижен вдвое. Поэтому для  $\Phi_i$  в монобинарной клеточной форме матрицы  $\text{Rot } \Phi$  применяют интервал  $[-\pi \div +\pi]$ .

В формулах (243), (244) фигурируют ортогональные рефлекторы, для которых зеркала есть  $r$ -подпространства  $\langle im A_1 \rangle$  и  $\langle im A_2 \rangle$ , согласно (176), (177). Помимо них в *евклидовой тензорной тригонометрии* при  $r_1 = r_2 = r$  особое значение имеет симметричный рефлектор, для которого зеркало есть срединное подпространство тензорного угла. В тригонометрическом базисе это подпространство задаётся векторами  $u_i$  ( $i = 1, \tau$ ) – см. § 5.5, то есть собственными векторами проективного косинуса с положительными собственными значениями « $+ \cos \varphi_i$ » при условии  $2r < n$  (рис.2). В случае же  $2r > n$  срединное подпространство расширяется ещё на  $\langle P_3 \rangle$ . Новая тензорная характеристика именуется как *срединный рефлектор*. Согласно (242), проективный косинус представляется в виде алгебраической суммы двух ортогональных слагаемых – с положительными и с отрицательными собственными значениями:

$$\cos \tilde{\Phi}_{12} = \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} + \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus}.$$

Эти слагаемые суть сингулярные симметричные матрицы. Зеркало срединного рефлектора есть подпространство  $\langle im \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \rangle$ . Согласно (176), срединный рефлектор теоретически выражается как

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \overleftarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}} - \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}}. \quad (247)$$

Покажем, что зеркало данного рефлектора расположено действительно посередине между зеркалами планаров, образующих тензорный угол. Для этого получим срединный рефлектор либо ротацией рефлектора первого планара на угол  $\{+\Phi_{12}/2\}$ , либо ротацией рефлектора второго планара на угол  $\{-\Phi_{12}/2\}$  как двухвалентных тензоров. В соответствии с принципом бинарности имеем:

$$\begin{array}{c}
 \text{Rot } \Phi_{12}/2 \\
 \boxed{\begin{array}{cc} \cos \varphi_i/2 & -\sin \varphi_i/2 \\ \sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \end{array}}
 \end{array} \cdot 
 \begin{array}{c}
 \text{Ref } \{A_1 A_1'\} \\
 \boxed{\begin{array}{cc} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \end{array}}
 \end{array} \cdot 
 \begin{array}{c}
 \text{Rot}' \Phi_{12}/2 \\
 \boxed{\begin{array}{cc} \cos \varphi_i/2 & \sin \varphi_i/2 \\ -\sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \end{array}}
 \end{array} = \\[10pt]
 = 
 \begin{array}{c}
 \text{Rot}' \Phi_{12}/2 \\
 \boxed{\begin{array}{cc} \cos \varphi_i/2 & \sin \varphi_i/2 \\ -\sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \end{array}}
 \end{array} \cdot 
 \begin{array}{c}
 \text{Ref } \{A_2 A_2'\} \\
 \boxed{\begin{array}{cc} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \end{array}}
 \end{array} \cdot 
 \begin{array}{c}
 \text{Rot } \Phi_{12}/2 \\
 \boxed{\begin{array}{cc} \cos \varphi_i/2 & -\sin \varphi_i/2 \\ \sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \end{array}}
 \end{array} = \\[10pt]
 = 
 \begin{array}{c}
 \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \\
 \boxed{\begin{array}{cc} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}}
 \end{array}. \quad (248)$$

Здесь подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  соответствует либо отрицательный единичный блок ( $2r < n$ ), либо положительный единичный блок ( $2r > n$ ), либо этот блок отсутствует ( $2r = n$ ). Простые матрицы определяются как *тригонометрически согласованные*, если они приводятся к W-форме одной и той же структуры в общем базисе. Причём, как известно, нормальные матрицы приводятся к ней ортогональным преобразованием, обозначаемым далее как  $R_W$ .

**Правило №2.** *Тригонометрически согласованные ротационные матрицы одного и того же вида, например сферические, коммутативны. При этом в их произведениях тензорные углы-аргументы моторного типа образуют алгебраическую сумму.*

**Правило №3.** *Ротационная сферическая матрица переносится через сферически ортогональный рефлектор (при их тригонометрической согласованности) с изменением знака её угла-аргумента.*

Эти правила получают также непосредственным путём с использованием принципа бинарности. Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} \text{Rot } \Phi_{12} \cdot (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) &= \text{Rot } 2\Phi_{12} \cdot (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) = \\ &= (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) \cdot \text{Rot } (-2\Phi_{12}) = \{\cos(\tilde{\Phi} \pm 2\tilde{\Phi}_{12}) \pm \sin(\tilde{\Phi} \pm 2\tilde{\Phi}_{12})\}, \\ \text{Ref}\{A_2 A_2'\} &= \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) = \text{Rot } 2\Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\}. \end{aligned}$$

Следствие. *Согласованная ротация рефлектора как двухвалентного тензора на угол  $\Phi$  тождественна его ротации как одновалентного тензора на угол  $2\Phi$ .*

Кроме того, для согласованных рефлекторов справедливо наиболее полное обобщение утверждений (243) и (244):

$$(\cos \tilde{\Phi}_{12} \pm \sin \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\cos \tilde{\Phi}_{34} \mp \sin \tilde{\Phi}_{34}) = \text{Rot } \{\pm \Phi_{12} \pm \Phi_{34}\}.$$

Множество тригонометрически согласованных матриц включает в себя, например, все матрицы, производимые аналитической функцией от пары антисимметрических простых матриц. Если в (243) и (245) в качестве второго линеара взять  $A_2 = R_{12} \cdot A_1$ , где  $\det R_{12} = +1$ , то с учётом (98) и (99) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overleftrightarrow{A_2 A_2'} &= R_{12} \cdot \overleftrightarrow{A_1 A_1'} \cdot R_{12}', \\ \text{Ref}\{A_2 A_2'\} &= R_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot R_{12}'. \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

На множестве матриц  $\langle R_{12} \rangle$ , выполняющих указанную операцию, матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$ , получаемая однозначно из (245), имеет тригонометрическое подпространство *минимальной* размерности. Именно она тригонометрически согласована со следующими рефлекторами:  $\text{Ref}\{A_1 A_1'\}$ ,  $\text{Ref}\{A_2 A_2'\}$  и  $\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^\oplus$ . С учётом Правила №3 справедлива общая формула:

$$\text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{\mathbf{AA}'\} \cdot \text{Rot } \Phi_{12} = \text{Ref}\{\mathbf{AA}'\} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \text{ или } \mathbf{A}_2). \quad (250)$$

В указанном случае множество  $\langle R_{12} \rangle$  не произвольно. А именно:  $\langle R_{12} \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Rot } \Theta_{12} \rangle$ , где  $\Theta_{12}$  – сферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Phi_{12}$ , или *ортосферический угол*. Для тензорных углов этих двух типов и только для них выполняются соотношения:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot } \Phi_{12} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \text{Rot}(-\Phi_{12}) \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot}(-\Phi_{12}), \\ \text{Rot}' \Theta_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot } \Theta_{12} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \text{Rot} \Theta_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot}' \Theta_{12}. \end{array} \right. \quad (251)$$

Соотношения (251) лежат в основе как ротационной *квазиевклидовой тригонометрии* с вышеуказанным срединным рефлектором в качестве вводимого независимо *рефлектор-тензора*, так и *внешней сферической геометрии*. Последняя по существу есть *общая геометрия постоянной положительной кривизны* (со *сферической тригонометрией* в ней). Эта геометрия реализуется на специальном гиперсферионде, вложенном в квазиевклидово пространство, задаваемое рефлектор-тензором и евклидовой метрикой.

В тригонометрической форме срединный рефлектор представляется в виде:

$$\begin{aligned} \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} &= \cos \Phi_{12} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12} - i \cdot \sin \Phi_{12} \cdot \sin \tilde{\Phi}_{12} = \\ &= \cos \tilde{\Phi}_{12} \cdot \cos \Phi_{12} + i \cdot \sin \tilde{\Phi}_{12} \cdot \sin \Phi_{12}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что *срединный рефлектор определяется однозначно при заданной канонической форме проективного косинуса* (237). Ориентация тензорного угла не имеет значения. В тригонометрическом базисе видно, что срединный рефлектор осуществляет операцию ортогонального отражения (рефлексии) относительно подпространства, задаваемого координатными осями  $u_i$  (то есть зеркала):

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1'\} = \text{Rot}(-\Phi_{12}) \cdot \text{Ref}\{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2'\};$$

В *проективной версии* тензорной тригонометрии все рефлекторы согласуются по формулам типа:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ref}\{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2'\} &= \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Ref}\{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1'\} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}, \\ \text{Ref}\{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1'\} &= \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Ref}\{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2'\} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}. \end{aligned} \right\} \quad (252)$$

В квазиевклидовой тригонометрии срединный рефлектор с максимальным тригонометрическим рангом (§ 5.5) задаёт не только тригонометрический базис, но и рефлектор-тензор пространства  $\langle Q^{n+q} \rangle$ :

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \{\sqrt{I}\}_S \quad (\tau = \tau_{\max} = q).$$

## § 5.7. Тригонометрическая теория простых корней $\sqrt{I}$

Далее выясним связь тензорной тригонометрии с теорией корней  $\sqrt{I}$ . Простой квадратный корень и он же рефлектор  $\sqrt{I} = \text{Ref}\{Bp\}$  приводится модальным преобразованием к блочно-единичной форме:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline +I & Z \\ \hline Z & -I \\ \hline \end{array} q^+ \quad (q^+ + q^- = n); \quad q^-$$

где  $q^+ = \text{rang } Bp = \text{rang } A = r$ ,

$q^- = \text{sing } Bp = \text{sing } A = n - r$ .

Определим *тригонометрический ранг* матрицы как  $2\tau = 2\min \langle q^+, q^- \rangle = 2\min \langle r, n - r \rangle$ . Это фактически размерность тригонометрического подпространства любой тригонометрической матрицы. Выделим *симметричные* корни  $(\sqrt{I})' = (\sqrt{I})'$ . Пусть  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$  – пара независимых симметричных корней. Полагаем

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{A_1 A_1}' = \frac{I + (\sqrt{I})_1}{2}, \quad \overrightarrow{A_1 A_1}' = \frac{I - (\sqrt{I})_1}{2}, \\ \overleftarrow{A_2 A_2}' = \frac{I + (\sqrt{I})_2}{2}, \quad \overrightarrow{A_2 A_2}' = \frac{I - (\sqrt{I})_2}{2}, \end{array} \right\} \leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (\sqrt{I})_1 = 2\overleftarrow{A_1 A_1}' - I = I - 2\overrightarrow{A_1 A_1}', \\ (\sqrt{I})_2 = 2\overleftarrow{A_2 A_2}' - I = I - 2\overrightarrow{A_2 A_2}'. \end{array} \right\} \quad (253)$$

Откуда с учётом (163), (171), (176) и (177) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \tilde{\Phi}_{12} - \sin \tilde{\Phi}_{12} = (\sqrt{I})_1 = \text{Ref}\{A_1 A_1'\}, \\ \cos \tilde{\Phi}_{12} + \sin \tilde{\Phi}_{12} = (\sqrt{I})_2 = \text{Ref}\{A_2 A_2'\}. \end{array} \right\} \quad (254)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \tilde{\Phi}_{12} = \frac{(\sqrt{I})_2 + (\sqrt{I})_1}{2}, \\ \sin \tilde{\Phi}_{12} = \frac{(\sqrt{I})_2 - (\sqrt{I})_1}{2}. \end{array} \right\} \quad (255)$$

Если исходные корни имеют один и тот же тригонометрический ранг, то однородные проекторы эквивалентные и обратно.

### Следствия

1. Симметричный корень  $\sqrt{I}$  задаёт в  $\langle E^n \rangle$  взаимно-однозначно сферически ортогональные проектор и рефлектор, а также прямой тензорный угол одного и того же тригонометрического ранга.

2. Пара симметричных корней  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$  задаёт в  $\langle E^n \rangle$  взаимно-однозначно тензорный угол  $\tilde{\Phi}_{12}$  и его тригонометрические функции.

Если же исходные корни имеют один и тот же тригонометрический ранг, то  $(\sqrt{I})_2 \cdot (\sqrt{I})_1 = \text{Rot } 2\Phi_{12}$ .

3. Пара симметричных корней  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$  всегда представима в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в W-форме одной и той же структуры, согласно (254), в одном и том же ортонормированном базисе  $\{R_w\}$  при исходном декартовом базисе  $\tilde{E} = \{R\}$ .

Далее выделим простые несимметричные корни  $\sqrt{I} \neq (\sqrt{I})'$ . Пусть координаты корней даны также в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в некотором исходном ортонормированном базисе  $\{R\}$ . Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \overleftrightarrow{B} &= \frac{I + \sqrt{I}}{2}, & \overrightarrow{B} &= \frac{I - \sqrt{I}}{2}, \\ \overleftrightarrow{B}' &= \frac{I + (\sqrt{I})'}{2}, & \overrightarrow{B}' &= \frac{I - (\sqrt{I})'}{2}, \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \sqrt{I} &= 2\overleftrightarrow{B} - I = I - 2\overrightarrow{B}, \\ (\sqrt{I})' &= 2\overleftrightarrow{B}' - I = I - 2\overrightarrow{B}'. \end{aligned} \right. \quad (256)$$

Откуда с учётом (198), (203), (211), (212) имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_B - i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B = \sqrt{I} = \operatorname{Ref}\{B\}, \quad (257)$$

$$\sec \tilde{\Phi}_{B'} + i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_{B'} = (\sqrt{I})' = \operatorname{Ref}\{B'\}.$$

$$\sec \tilde{\Phi}_B = \frac{(\sqrt{I})' + \sqrt{I}}{2}, \quad i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B = \frac{(\sqrt{I})' - \sqrt{I}}{2}. \quad (258)$$

Исходные корни  $\sqrt{I}$  и  $(\sqrt{I})'$  всегда имеют один и тот же тригонометрический ранг. Между простым корнем  $\sqrt{I} \neq (\sqrt{I})'$  и  $\overleftrightarrow{B}$  ( $\overleftrightarrow{B}'$ ), согласно (256), имеется взаимно-однозначное соответствие. Они же однозначно задают эквиранговые ортопроекторы в (253), при этом  $\det \cos \tilde{\Phi}_{12} \neq 0$ , или ортопроекторы  $\overleftrightarrow{B'B}$  и  $\overleftrightarrow{BB'}$ , при этом  $\det \cos \tilde{\Phi}_B \neq 0$ , и пару симметричных корней  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$ , при этом  $\det [(\sqrt{I})_1 + (\sqrt{I})_2] \neq 0$ .

### Следствия

1. Простой несимметричный корень  $\sqrt{I}$  задаёт в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  взаимно-однозначно сферически косогональные проектор, рефлектор и тригонометрические функции  $\operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B$  и  $\sec \tilde{\Phi}_B$  и однозначно пару эквиранговых ортопроекторов и орторефлекторов, а также тензорный угол  $\tilde{\Phi}_B$  и тригонометрические функции  $\sin \tilde{\Phi}_B$  и  $\cos \tilde{\Phi}_B$ .

2. Все характеристические проекторы  $\overleftrightarrow{B}$ ,  $\overleftrightarrow{B'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$ ,  $\overleftrightarrow{B'B}$ , а также тригонометрические функции угла  $\tilde{\Phi}_B$  и соответствующие им рефлекторы (тригонометрические корни) в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  приводятся к согласованным W-формам в одном и том же ортонормированном базисе  $\{R_w\}$  при исходном декартовом базисе  $\tilde{E} = \{R\}$ .

(Наиболее общо аналогичные “тригонометрические” утверждения имеют место для симметричных и простых несимметричных корней типа  $\sqrt{S}$ .)

### § 5.8. Моторные тензорные синус, косинус, секанс и тангенс

Тензорный косинус и синус моторного угла формально определяются через ротационную ортогональную матрицу ( $\det R = +1 \leftrightarrow R = \text{Rot } \Phi$ ) как

$$\cos \Phi = \cos' \Phi = \frac{\text{Rot } \Phi + \text{Rot}' \Phi}{2} = \frac{\text{Rot } \Phi + \text{Rot}(-\Phi)}{2}, \quad \left. \right\} \quad (259)$$

$$i \sin \Phi = - (i \sin \Phi)' = \frac{\text{Rot } \Phi - \text{Rot}' \Phi}{2} = \frac{\text{Rot } \Phi - \text{Rot}(-\Phi)}{2}. \quad \left. \right\} \quad (260)$$

Тензорный секанс и тангенс моторного угла *пока* определим формулами:

$$\sec \Phi = \sec' \Phi = \cos^{-1} \Phi, \quad \left. \right\} \quad (261)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg}' \Phi = +i \sin \Phi \cdot \sec \tilde{\Phi} = -\sec \tilde{\Phi} \cdot i \sin \Phi. \quad \left. \right\} \quad (262)$$

Очевидны тригонометрические соотношения, аналогичные ранее полученным для проективных функций:

$$\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi = I = \cos^2 \Phi - (i \sin \Phi)^2. \quad (263)$$

$$\sec^2 \Phi - \operatorname{tg}^2 \Phi = I. \quad (264)$$

Вышеуказанные пары моторных функций коммутативны:

$$\cos \Phi \cdot \sin \Phi = \sin \Phi \cdot \cos \Phi, \quad \sec \Phi \cdot \operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \Phi \cdot \sec \Phi. \quad (265, 266)$$

Для углов и функций моторного типа необходимо выполняется условие  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle = 0$ . Канонические W-формы вещественной ортогональной матрицы, а также моторного косинуса и синуса в тригонометрическом базисе имеют вид:

$$\text{Rot } \Phi = \cos \Phi + i \cdot \sin \Phi = \exp(i\Phi) = \quad (267)$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline & \cos \Phi & \\ \hline \cos \varphi_j & 0 & \\ \hline 0 & \cos \varphi_j & \\ \hline \end{array} + i \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \sin \Phi & \\ \hline 0 & +i \cdot \sin \varphi_j & \\ \hline -i \cdot \sin \varphi_j & 0 & \\ \hline \end{array} . \quad \langle \mathcal{P}_3 \rangle$$

Далее установим канонические формы моторных функций и угла. Для этого сначала перейдём в комплексный базис диагональной формы синуса, а затем вернёмся в исходный *вещественный тригонометрический базис* (то есть в базис диагонального косинуса). Это в итоге тождественное модальное преобразование позволяет установить каноническую форму моторного угла в тригонометрическом базисе:

$$\begin{array}{c}
 \tilde{E}_D \rightarrow \cos D\{\Phi\} + i \cdot \sin D\{\Phi\} \xrightarrow{\tilde{E}_D^{-1}} \cos \Phi + i \cdot \sin \Phi = \exp i\Phi \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j & \\ \hline \end{array} + i \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\tilde{E}_D^{-1}} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i\cdot\varphi_j \\ \hline -i\cdot\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} + i \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i\cdot\varphi_j \\ \hline -i\cdot\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \exp \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} . \\
 \end{array}$$

(Заметим, что для матриц, комплексифицированных за счёт перехода из декартова в эрмитово ортонормированный базис, при сопряжении используется операция эрмитова транспонирования.) В дополнение к формулам (164) и (170) для углов проективного типа отсюда вытекают родственные соотношения для углов моторного типа:

$$\Phi_{12} = -(\Phi_{12})' = -\Phi_{21}, \quad \Phi_B = -(\Phi_B)' = -\Phi_{B'} . \quad (268)$$

$$\begin{array}{c}
 \cos \Phi = \cos D\{\Phi\} = \cos \cos \Phi \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i\cdot\varphi_j \\ \hline -i\cdot\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = 1
 \end{array}$$

(эта формула более очевидна, если использовать ряд Маклорена),

$$\begin{array}{c}
 \sin \Phi = i \cdot \sin D\{\Phi\} = i \cdot \sin \cos \Phi \\
 i \cdot \sin \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i\cdot\varphi_j \\ \hline -i\cdot\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = i \cdot \sin \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\sin \varphi_j \\ \hline +\sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = 0
 \end{array}$$

### § 5.9. Взаимосвязь между проективными и моторными тригонометрическими функциями и углами

С учётом (236)–(239), (261), (262) и (267) получаем соотношение:

$$\operatorname{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\oplus} \cdot (\mathrm{i} \tilde{\Phi}) = \Phi = (-\mathrm{i} \tilde{\Phi}) \cdot \operatorname{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\oplus}, \quad (269)$$

$$(\tilde{\Phi}^2 = \Phi^2);$$

$$\operatorname{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\oplus} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \tilde{\Phi} \\ -\sin \tilde{\Phi} \\ \sec \tilde{\Phi} \\ -\mathrm{i} \tan \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \Phi \\ \mathrm{i} \sin \Phi \\ \sec \Phi \\ \tan \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \tilde{\Phi} \\ \sin \tilde{\Phi} \\ \sec \tilde{\Phi} \\ \mathrm{i} \tan \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} \cdot \operatorname{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\oplus}. \quad (270)$$

**Правило №4.** Квадраты и любые чётные степени тензорного угла проективного и моторного типа, а также их тригонометрических функций одноимённого вида равны.

Углы  $\tilde{\Phi}$  и  $\Phi$  суть симметричный и эрмитов тензоры, приводимые к тождественным диагональным формам, но в различных ортогональных базисах – декартовом и эрмитово ортонормированном. Здесь, конечно, подразумевается, что  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle = 0$ , например при  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_B$ .

Далее для преобразования вещественных тригонометрических функций в их комплексные псевдоаналоги (с целью последующего естественного ввода тензорных гиперболических функций) определим комплексный тригонометрический базис. Ему отвечает модальная матрица соответствующего перехода – псевдоарифметический квадратный корень из срединного рефлектора тензорного угла (248):

$$\tilde{E}_0 = \sqrt{\operatorname{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\oplus}} \cdot R_W = R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & +i \\ \hline \end{array} = R_W \cdot \sqrt{I^{\oplus}}. \quad (271)$$

При этом подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  соответствует либо мнимоединичный блок ( $2r < n$ ), либо положительный единичный блок ( $2r > n$ ), либо этот блок вовсе отсутствует ( $2r = n$ ). Комплексный тригонометрический базис отличается от вещественного тем, что в нём координаты, соответствующие отрицательным собственным значениям проективного косинуса (то есть ординаты), мнимонизированы:  $v_j \rightarrow i v_j$ . При переходе в комплексный тригонометрический базис косинус и секанс не изменяются, а угол, синус и тангенс трансформируются в псевдогиперболические аналоги. (Далее нижние индексы «г» и «с» отвечают вышеуказанным вещественному и комплексному тригонометрическому базису.)

$$\tilde{E}_0^{-1} \cdot \{\tilde{\Phi}\}_r \cdot \tilde{E}_0 \equiv \{\Phi\}_r \equiv i \cdot \{-i\tilde{\Phi}\}_c \leftrightarrow \tilde{E}_0^{-1} \cdot \{i\Phi\}_r \cdot \tilde{E}_0 \equiv i \cdot \{-\tilde{\Phi}\}_r \equiv \{-i\Phi\}_c, \quad (272)$$

$$\tilde{E}_0^{-1} \cdot \{\sin \tilde{\Phi}\}_r \cdot \tilde{E}_0 \equiv \{\sin \Phi\}_r \equiv \{i \operatorname{sh} (-i\tilde{\Phi})\}_c \leftrightarrow \quad (273)$$

$$\leftrightarrow \tilde{E}_0^{-1} \cdot \{i \sin \Phi\}_r \cdot \tilde{E}_0 \equiv i \cdot \{-\sin \tilde{\Phi}\}_r \equiv \{\operatorname{sh} (-i\Phi)\}_c, \quad (274)$$

$$\tilde{E}_0^{-1} \cdot \{i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}\}_r \cdot \tilde{E}_0 \equiv i \cdot \{-\operatorname{tg} \Phi\}_r \equiv \{\operatorname{th} (-i\tilde{\Phi})\}_c \leftrightarrow \quad (275)$$

$$\leftrightarrow \tilde{E}_0^{-1} \cdot \{\operatorname{tg} \Phi\}_r \cdot \tilde{E}_0 \equiv \{\operatorname{tg} \tilde{\Phi}\}_r \equiv \{i \operatorname{th} (-i\Phi)\}_c. \quad (276)$$

Ниже сопоставлены канонические формы угла и функций в тригонометрических базисах – вещественном (слева) и комплексном (справа):

$$\{\tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \varphi_j \\ \hline \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\tilde{\Phi}\}_r', \quad \{\tilde{\Phi}\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\tilde{\Phi}\}_c^*, \quad (277)$$

$$\{i\Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = -\{\tilde{\Phi}\}_r', \quad \{i\Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & i \cdot \varphi_j \\ \hline i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = -\{\tilde{\Phi}\}_c^*; \quad (278)$$

$$\{\cos \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\operatorname{ch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\operatorname{ch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{ch} (\pm i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (279)$$

$$\{\cos \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{ch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{ch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{ch} (\pm i\Phi)\}_c, \quad (280)$$

$$\{\sec \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline +\sec \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\operatorname{sch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\operatorname{sch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sch} (\pm i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (281)$$

$$\{\sec \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{sch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{sch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sch} (\pm i\Phi)\}_c; \quad (282)$$

$$\{\sin \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \sin \varphi_j \\ \hline \sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +\operatorname{sh} i\varphi_j \\ \hline -\operatorname{sh} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{i \operatorname{sh} (-i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (283)$$

$$\{i \sin \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\sin \varphi_j \\ \hline +\sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\operatorname{sh} i\varphi_j \\ \hline -\operatorname{sh} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sh} (-i\Phi)\}_c; \quad (284)$$

$$\{i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}\}_r = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg} \varphi_j \\ +\operatorname{tg} \varphi_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{th} i\varphi_j \\ -\operatorname{th} i\varphi_j & 0 \end{pmatrix} = \{\operatorname{th} (-i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (285)$$

$$\{\operatorname{tg} \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +\operatorname{th} i\varphi_j \\ \hline -\operatorname{th} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{i \cdot \operatorname{th} (-i\Phi)\}_c. \quad (286)$$

Для ротационной ортогональной матрицы справедливы формулы Муавра и Эйлера:

$$\begin{aligned} \text{Rot}^m \Phi &= \cos \{\mathbf{m} \cdot \Phi\} + i \sin \{\mathbf{m} \cdot \Phi\} = \\ &= \text{ch } \{\mathbf{m} \cdot i\Phi\} + \text{sh } \{\mathbf{m} \cdot i\Phi\} = \exp \{\mathbf{m} \cdot i\Phi\} = \text{Rot } \{\mathbf{m} \cdot \Phi\}. \end{aligned} \quad (287)$$

В вещественном тригонометрическом базисе это интерпретируется как

$$\text{Rot}^m \Phi = \begin{pmatrix} \cos m\varphi_j & -\sin m\varphi_j \\ +\sin m\varphi_j & \cos m\varphi_j \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -m\varphi_j \\ +m\varphi_j & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

В комплексном тригонометрическом базисе это интерпретируется как

$$\{\text{Rot}^m \Phi\}_c = \begin{pmatrix} \cos m\varphi_j & -i \cdot \sin m\varphi_j \\ -i \cdot \sin m\varphi_j & \cos m\varphi_j \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -i \cdot m\varphi_j \\ -i \cdot m\varphi_j & 0 \end{pmatrix}.$$

(Если в эти формулы подставить  $m = 1/2$ , то таким образом можно вычислить тригонометрический квадратный корень (245) из матрицы-функции.)

## § 5.10. Деформационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа

К сферической ротационной матрице-функции ранее формально привело последовательное применение *ортогональных* рефлекторов, связанных с двумя эквиранговыми линеорами (планарами), согласно (243). Аналогичным образом, с использованием принципа бинарности последовательное применение *косоугольных* рефлекторов, связанных

с той же парой экиранговых линеоров (планаров), формально приводит к определению другого нового понятия – *сферической деформационной матрицы-функции*. Как и ротационная матрица-функция, она имеет бинарную элементарную тригонометрическую структуру в виде:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{B'\} & \\ \hline \sec \varphi_j & -\operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_j & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{B\} & \\ \hline \sec \varphi_j & \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline -\operatorname{tg} \varphi_j & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Def } \alpha_B & \\ \hline \sec \alpha_j & \operatorname{tg} \alpha_j \\ \hline \operatorname{tg} \alpha_j & \sec \alpha_j \\ \hline \end{array} (\alpha_B \neq 2\tilde{\Phi}_B).$$

При этом подпространству  $\langle P_3 \rangle$  в указанном произведении всегда соответствует диагонально-единичный блок. В целом же указанная матрица-функция осуществляет сферическую деформацию на тензорный угол  $\alpha_B$ . В аналитической форме это матричное преобразование реализуется аналогично (243) и (244):

$$\begin{aligned} \text{Ref}\{B'\} \cdot \text{Ref}\{B\} &= (\sec \tilde{\Phi}_B + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B) \cdot (\sec \tilde{\Phi}_B - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B) = \\ &= (\sec^2 \tilde{\Phi}_B + \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi}_B) + (2i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B \cdot \sec \tilde{\Phi}_B) = \text{Def } \alpha_B, \end{aligned} \quad (288)$$

$$\text{Ref}\{B\} \cdot \text{Ref}\{B'\} = \text{Def}^{-1} \alpha_B = \text{Def}(-\alpha_B). \quad (289)$$

Приставка «Def» обозначает деформационную матрицу-функцию от тензорного сферического угла моторного типа. Но если ротационные тензорные функции имеют синусно-косинусную природу, то как бы аналогичные им по формальному определению деформационные тензорные функции имеют тангенсно-секансную природу. (Полной аналогии в *сферическом* варианте угла здесь, очевидно, нет.) Бинарная тензорная деформация осуществляется также, как и ротация, в тригонометрическом подпространстве (рис. 2) относительно его сферически ортогонального дополнения. Тензорные секанс и тангенс теперь уже вполне естественным путём определяются через сферическую деформационную матрицу соотношениями, аналогичными (259) и (260):

$$\sec \Phi = (\text{Def } \Phi + \text{Def}^{-1} \Phi) / 2 = [\text{Def } \Phi + \text{Def}(-\Phi)] / 2, \quad (290)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = (\text{Def } \Phi - \text{Def}^{-1} \Phi) / 2 = [\text{Def } \Phi - \text{Def}(-\Phi)] / 2. \quad (291)$$

Тензорные косеканс и котангенс моторного угла определяются соответственно как обратные или квазиобратные синус и тангенс. Каноническая  $W$ -форма для вещественной деформационной матрицы реализуется в том же вещественном тригонометрическом базисе:

$$\text{Def } \Phi = \text{Def}' \Phi = \sec \Phi + \operatorname{tg} \Phi = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_j & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array}, \quad (292)$$

1

$$\text{Def}^{-1} \Phi = \text{Def}(-\Phi) = \sec \Phi - \operatorname{tg} \Phi. \quad (293)$$

Канонические формы ротационной и деформационной матриц-функций сферического тензорного угла в комплексном тригонометрическом базисе имеют вид:

$$\{\text{Rot } \Phi\}_c = \cos \Phi + \{i \cdot \sin \Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & -i \cdot \sin \varphi_j \\ \hline -i \cdot \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch}(-i\Phi) & \text{sh}(-i\Phi) \\ \hline \text{sh}(-i\Phi) & \text{ch}(-i\Phi) \\ \hline \end{array} \quad (294)$$

1

$$\{\text{Rot } \Phi\}_c^* = \{\text{Rot}(-\Phi)\}_c = \cos \Phi - \{i \cdot \sin \Phi\}_c; \quad (295)$$

$$\{\text{Def } \Phi\}_c = \sec \Phi + \{\operatorname{tg} \Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & -i \cdot \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline +i \cdot \operatorname{tg} \varphi_j & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \operatorname{sch}(-i\Phi) + i \cdot \operatorname{th}(-i\Phi), \quad (296)$$

1

$$\{\text{Def } \Phi\}_c^{-1} = \{\text{Def}(-\Phi)\}_c = \sec \Phi - \{\operatorname{tg} \Phi\}_c. \quad (297)$$

Как для ротационной, так и для бинарной деформационной матрицы детерминант каждой клетки W-формы и в целом равен +1. Деформационная матрица-функция от сферического угла симметрична и положительно определена. Ротация базисов  $2 \times 2$ -клеток W-формы, то есть в пределах собственных тригонометрических плоскостей, на углы  $\varphi_j = \pm \pi/4$  приводит к диагонализации этих клеток. Собственные значения матрицы:  $\mu_{2j} = \sec \varphi_j + \operatorname{tg} \varphi_j > 0$ ,  $\mu_{2j+1} = \sec \varphi_j - \operatorname{tg} \varphi_j = \mu_{2j}^{-1} > 0$  и, возможно,  $\mu_k = +1$ . Чтобы выяснить суть бинарного деформационного преобразования, представим его в виде:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_j & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \hline \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j + \operatorname{tg} \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \sec \varphi_j - \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ \hline -\sin \pi/4 & \cos \pi/4 \\ \hline \end{array}.$$

Отсюда видно, что модальное сферическое деформационное преобразование в канонической форме (292) сводится на собственной тригонометрической плоскости к тому, что осуществляется растяжение координатной сетки по главной диагонали (1-й и 3-й квадрант) с

коэффициентом  $\mu = \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi > 0$  и сжатие сетки по побочной диагонали с обратным коэффициентом  $\mu^{-1} = \sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi > 0$ . По аналогии с представлением комплексного числа в форме (149), любое *положительное* число  $\mu$  и обратное ему взаимно-однозначно представляются через сферический угол:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi > 0, \\ \mu^{-1} = \sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi > 0, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \sec \varphi = (\mu + \mu^{-1})/2, \\ \operatorname{tg} \varphi = (\mu - \mu^{-1})/2. \end{array} \right\} \quad (298)$$

$$-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$$

Дадим ещё одну интерпретацию бинарного деформационного преобразования, связанную с использованием *перекрёстных базисов*. В частности, она применима при релятивистских преобразованиях в пространстве-времени Минковского. А именно пусть декартовы базисы  $\tilde{E}_i$  и  $\tilde{E}_j$  связаны ротационным преобразованием:  $\tilde{E}_i = \operatorname{Rot}(-\Phi_{ij}) \cdot \tilde{E}_j$ . Декартовы координаты вектора в обоих базисах связаны пассивным преобразованием:

$$a^{(i)} = \operatorname{Rot} \Phi_{ij} \cdot a^{(j)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -\sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & \cos \varphi_j \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_t \cdot x_1^{(j)} - \sin \varphi_t \cdot x_2^{(j)} \\ \sin \varphi_t \cdot x_1^{(j)} + \cos \varphi_t \cdot x_2^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix}.$$

В пределах  $t$ -й  $2 \times 2$ -клетки базис  $\tilde{E}_j$  повёрнут относительно базиса  $\tilde{E}_i$  на угол  $\varphi_t$  по часовой стрелке. Определим *перекрёстные* базисы  $\tilde{E}_{i,j}$  со смешанными осями  $\langle x_1^{(i)}, x_2^{(j)} \rangle$  и  $\tilde{E}_{j,i}$  со смешанными осями  $\langle x_1^{(j)}, x_2^{(i)} \rangle$ . Они связаны *активным* модальным преобразованием вида

$$\tilde{E}_{i,j} = \operatorname{Def}(-\Phi_{ij}) \cdot \tilde{E}_{j,i}. \quad (299)$$

В пределах той же  $2 \times 2$ -клетки *перекрёстные координаты* вектора в обоих базисах связаны пассивным модальным преобразованием того же вида:

$$\begin{aligned} a^{(i,j)} = \operatorname{Def} \Phi_{ij} \cdot a^{(j,i)} &= \begin{vmatrix} \sec \varphi_t & \operatorname{tg} \varphi_t \\ \operatorname{tg} \varphi_t & \sec \varphi_t \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(j,i)} \\ x_2^{(j,i)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sec \varphi_t \cdot x_1^{(j,i)} - \operatorname{tg} \varphi_t \cdot x_2^{(j,i)} \\ \operatorname{tg} \varphi_t \cdot x_1^{(j,i)} + \sec \varphi_t \cdot x_2^{(j,i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(i,j)} \\ x_2^{(i,j)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (300)$$

Здесь координаты вектора находятся *перекрёстным проецированием*. Заметим, что в евклидовом пространстве при декартовом проецировании значениям координат тензорного объекта соответствует тригонометрический инвариант (182), а при перекрёстном проецировании значениям координат тензорного объекта соответствует тригонометрический инвариант (208).

Естественным обобщением *бинарной* сферической деформационной матрицы является положительно определённая симметрическая матрица с единичным детерминантом, например  $\{G/\sqrt{\det G}\}$ . Любое линейное модальное преобразование  $V$  без рефлексии (для двухвалентных тензоров) сводится к модальной матрице с единичным детерминантом. Поэтому, согласно её полярному разложению, такое модальное преобразование представляется произведением ротационной и обобщённой деформационной матриц при сохранении одной и той же ориентации базиса, то есть при  $\det V > 0$ .

### § 5.11. Специальные модальные преобразования собственных ортогональных и косоогональных проекторов и рефлекторов

В тензорной тригонометрии между центральным планаром и симметричным проектором одного и того же ранга имеется взаимно-однозначное соответствие. То же в евклидовом пространстве относится к их ортогональным дополнениям. Эквиранговые планары, как и ортопроекторы, преобразуются друг в друга посредством как тензорной ротации, так и тензорной рефлексии. Формулы модального преобразования следуют, например, из (252), (176), (177) или непосредственно с применением принципа бинарности:

$$\overleftrightarrow{A_2} \overleftrightarrow{A_2}' = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \overleftrightarrow{A_1} \overleftrightarrow{A_1}' \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \overleftrightarrow{A_1} \overleftrightarrow{A_1}' \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}, \quad (301)$$

$$\overleftrightarrow{B'} \overleftrightarrow{B} = \text{Rot } \Phi_B \cdot \overleftrightarrow{B} \overleftrightarrow{B}' \cdot \text{Rot } (-\Phi_B) = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\oplus} \cdot \overleftrightarrow{B} \overleftrightarrow{B}' \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\oplus}. \quad (302)$$

Они преобразуются как ортогональные тензоры валентности 2. “Внутри” символического октаэдра (рис. 1), проведя диагональ  $PQ$ , можно указать два характеристических “равнобедренных” тензорных треугольника  $PZQ$  и  $PIQ$ , где  $\angle PZQ \equiv \angle PIQ \equiv \Phi_B$ . Кроме того, в тензорной тригонометрии, согласно условиям (217) – (220), имеется взаимно-однозначное соответствие между парой центральных эквиранговых планаров  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга  $r$  ( $\det A_1' A_2 \neq 0$ ) и косопроекторами  $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B}'$ . Характеристические косопроекторы  $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B}'$  ( $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B}'$ ) преобразуются друг в друга посредством как бинарной тензорной деформации, так и тензорной рефлексии. Формулы преобразований, аналогичные (252), (301), (302), устанавливаются также исходя из принципа бинарности и структуры косопроекторов (211), (212):

$$\begin{aligned} \text{Ref } \{B'\} &= \text{Def } \Phi_B \cdot \text{Ref } \{B\} \cdot \text{Def } (-\Phi_B) = \\ &= \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\oplus} \cdot \text{Ref } \{B\} \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\oplus}, \end{aligned} \quad (303)$$

$$\overleftarrow{\overrightarrow{B}}' = \text{Def } \Phi_B \cdot \overleftarrow{\overrightarrow{B}} \cdot \text{Def}(-\Phi_B) = \text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi}_B \}^{\oplus} \cdot \overleftarrow{\overrightarrow{B}} \cdot \text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi}_B \}^{\oplus}. \quad (304)$$

Аналогично (251), имеем:

$$\text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi}_B \}^{\oplus} = \text{Def } \Phi_B \cdot \text{Ref} \{ \overrightarrow{B} \} = \text{Def}(-\Phi_B) \cdot \text{Ref} \{ \overrightarrow{B}' \}. \quad (305)$$

“Внутри” символического октаэдра (рис. 1), проведя диагональ RS, можно указать ещё два особых характеристических треугольника: RZS и RIS. Они будут рассмотрены в главе 6.

Формулы рефлективного модального преобразования характеристических проекторов в (301) и в (304) приводятся к тригонометрической форме путём поклеточного умножения слева и справа на собственные косинусы и секансы (что возможно лишь для нуль-простой исходной матрицы):

$$\begin{Bmatrix} \overleftarrow{\overrightarrow{B}} \\ \overrightarrow{\overrightarrow{B}} \\ \overrightarrow{B} \end{Bmatrix} = \cos \tilde{\Phi}_B \cdot \begin{Bmatrix} \overleftarrow{\overrightarrow{B}} \\ \overrightarrow{\overrightarrow{B}} \\ \overrightarrow{B} \end{Bmatrix} \cdot \sec \tilde{\Phi}_B = \sec \tilde{\Phi}_B \cdot \begin{Bmatrix} \overleftarrow{\overrightarrow{B}} \\ \overrightarrow{\overrightarrow{B}} \\ \overrightarrow{B} \end{Bmatrix} \cdot \cos \tilde{\Phi}_B. \quad (306)$$

Эти модальные формулы нетрудно проверить через таблицу умножения характеристических проекторов (см. § 5.2). Формулы (302), (304), (306) – примеры модального преобразования, осуществляющего либо ротационной, либо рефлективной, либо симметричной тригонометрическими матрицами, но с *одинаковым* результатом.

В обратном порядке изложения все характеристические проекторы представляются через соответствующие им пары антисимметричных проективных тригонометрических функций, заданных как бы самостоятельным образом:

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{A_1 A_1'} = 1/2 \cdot (I + \cos \tilde{\Phi} - \sin \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{\overrightarrow{B} \overrightarrow{B}'}, \\ \overrightarrow{A_1 A_1'} = 1/2 \cdot (I - \cos \tilde{\Phi} + \sin \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{\overrightarrow{B} \overrightarrow{B}'}, \\ \overleftarrow{A_2 A_2'} = 1/2 \cdot (I + \cos \tilde{\Phi} + \sin \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{\overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}}, \\ \overrightarrow{A_2 A_2'} = 1/2 \cdot (I - \cos \tilde{\Phi} - \sin \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{\overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}}; \end{array} \right\} \quad (307)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{B} = 1/2 \cdot (I + \sec \tilde{\Phi} - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{A_1 A_2'}, \\ \overrightarrow{B} = 1/2 \cdot (I - \sec \tilde{\Phi} + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{A_1 A_2'}, \\ \overleftarrow{B}' = 1/2 \cdot (I + \sec \tilde{\Phi} + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{A_2 A_1'}, \\ \overrightarrow{B}' = 1/2 \cdot (I - \sec \tilde{\Phi} - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{A_2 A_1'}. \end{array} \right\} \quad (308)$$

Отсюда непосредственно следует применимость и для проекторов принципа бинарности. Множество всех характеристических орто-проекторов и множество всех симметричных идемпотентных матриц одного и того же ранга тождественны. Множество всех характеристических косопроекторов и множество всех несимметричных идемпотентных матриц одного и того же ранга тождественны. При условии

$\{\det \cos \tilde{\Phi} \neq 0 \leftrightarrow \det \sec \tilde{\Phi} \neq \infty\}$  пары  $\langle \overleftarrow{B}\overleftarrow{B}', \overleftarrow{B}'\overleftarrow{B} \rangle$  и  $\langle \overleftarrow{B}, \overleftarrow{B}' \rangle$  взаимно-однозначно соответствуют друг другу.

Представим ортопроекторы в тригонометрической W-форме, согласно (307). Используя бинарные соотношения, вычислим модальные матрицы, приводящие ортопроекторы к диагональной форме. Например, для ортопроектора  $\overleftarrow{B}\overleftarrow{B}'$  имеем:

$$\text{Rot } \Phi_B / 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_i / 2 & -\sin \varphi_i / 2 \\ \sin \varphi_i / 2 & \cos \varphi_i / 2 \end{pmatrix} \cdot 1/2 \cdot \begin{pmatrix} \overleftarrow{B}\overleftarrow{B}' \\ 1 + \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & 1 - \cos \varphi_i \end{pmatrix} \cdot \text{Rot}' \Phi_B / 2 = D\{\overleftarrow{B}\overleftarrow{B}'\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Или в матричной форме:  $V_{\text{col}_I}^{-1} \cdot \overleftarrow{B}\overleftarrow{B}' \cdot V_{\text{col}_I} = D\{\overleftarrow{B}\overleftarrow{B}'\}$ . В исходном орто-гиперболическом базисе  $\{R_W\}$  эта же модальная матрица выражается как

$$V_{\text{col}_I} = \text{Rot}(-\Phi_B / 2) \cdot R_W = R_W \cdot \{R'_W \cdot \text{Rot}(-\Phi_B / 2) \cdot R_W\}, \quad (309)$$

где в фигурных скобках дана ротационная матрица в вышеуказанной W-форме. В свою очередь, собственным подпространствам  $\langle \text{im } B' \rangle$  и  $\langle \ker B \rangle$  соответствуют системы ортогональных собственных вектор-столбцов этой же модальной матрицы:

$$b_{i_I} = R_W \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi_i / 2 \\ -\sin \varphi_i / 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_{i_I} = R_W \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi_i / 2 \\ \cos \varphi_i / 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом устанавливается модальная матрица из вектор-столбцов для приведения  $\overleftarrow{B}'\overleftarrow{B}$  к D-форме ( $V_{\text{col}_{II}}^{-1} \cdot \overleftarrow{B}'\overleftarrow{B} \cdot V_{\text{col}_{II}} = D\{\overleftarrow{B}'\overleftarrow{B}\}$ ), а именно

$$V_{\text{col}_{II}} = \text{Rot } \Phi_B / 2 \cdot R_W = R_W \cdot \{R'_W \cdot \text{Rot } \Phi_B / 2 \cdot R_W\}. \quad (310)$$

Собственным подпространствам  $\langle \text{im } B' \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$  соответствуют здесь системы ортогональных собственных вектор-столбцов указанной модальной матрицы:

$$\mathbf{b}_{iII} = R_W \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \varphi_i / 2 \\ \sin \varphi_i / 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{d}_{iII} = R_W \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin \varphi_i / 2 \\ \cos \varphi_i / 2 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Что же касается тригонометрических модальных матриц для диагонализации косопроекторов, то они будут вычислены в гл. 6 с применением сферическо-гиперболической аналогии. Сейчас же пока мы ограничимся формулами с использованием арифметических корней, но модальные матрицы в них теряют *сферическую* тригонометрическую природу:

$$\{R'_W \cdot \sqrt{\text{Def } \Phi_B}\} \cdot \overset{\curvearrowleft}{B} \cdot \{\sqrt{\text{Def } (-\Phi_B)} \cdot R_W\} = D \{B\}, \quad (311)$$

$$\{R'_W \cdot \sqrt{\text{Def } (-\Phi_B)}\} \cdot \overset{\curvearrowleft}{B'} \cdot \{\sqrt{\text{Def } \Phi_B} \cdot R_W\} = D \{B'\}. \quad (312)$$

## § 5.12. Элементарные тензорные сферические тригонометрические функции

В евклидовом или в квазиеуклидовом пространстве выделим группу централизованных непрерывных движений. Такого рода движения известны как *однородные*. В данном случае они задаются сферическими ротационными матрицами. Как было показано ранее – см. формулы (245), (246), такие движения для точечных элементов, векторов, прямых и гиперплоскостей в декартовом базисе задаются однозначно сферической ротационной матрицей с единственной тригонометрической  $2 \times 2$ -клеткой. Подобного вида тригонометрические матрицы-функции в дальнейшем именуются как *элементарные*. Они обозначаются с малой буквы, например ротационные функции как  $\text{rot } \Phi$ ,  $\text{rot } \Theta$ . В частности, элементарные матрицы могут применяться для описания специальных ротаций в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  – с реперной осью  $\langle X_{n+1} \rangle$  (с реперной гиперплоскостью) для отсчета скалярного значения угла ротации  $\varphi$ . Эти матрицы имеют специальную каноническую структуру в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ :

$$\{\text{rot}(\pm \Phi)\}_{3 \times 3}$$

$1 - (1 - \cos \varphi) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$-(1 - \cos \varphi) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$\mp \sin \varphi \cdot \cos \alpha_1$
$-(1 - \cos \varphi) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 - (1 - \cos \varphi) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$\mp \sin \varphi \cdot \cos \alpha_2$
$\pm \sin \varphi \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \sin \varphi \cdot \cos \alpha_2$	$\cos \varphi$

, (313)

$$\{\text{rot}(\pm \Phi)\}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$I_{n \times n} - (1 - \cos \varphi) \cdot \{e_\alpha \cdot e_\alpha'\}$ $(e_\alpha \cdot e_\alpha' = \overleftarrow{e_\alpha} \cdot \overleftarrow{e_\alpha'})$	$\mp \sin \varphi \cdot e_\alpha$
$\pm \sin \varphi \cdot e_\alpha'$	$\cos \varphi$

(314)

Координаты матриц даны, как всегда, в правом декартовом базисе  $\tilde{E}_1$ . Прямая *ориентированная* линия  $\langle x_{n+1} \rangle$  есть реперная (полярная) ось координат, от которой отсчитывается положительный для  $\text{rot } \Phi$  скалярный угол ротации  $\varphi$  с направляющими косинусами  $\cos \alpha_k$  ( $k = 1, n$ ), выраженнымми в ортогонально дополнительном к реперной оси декартовом суббазисе с координатами  $x_k$ .

Сначала докажем формулу (313). Применим такое ротационное преобразование дополнительного декартова суббазиса, чтобы новая 1-я ось координат  $\langle x_1' \rangle$  и вектор направляющих косинусов тензорного угла  $\Phi$ , лежащий в плоскости двумерного суббазиса, а именно

$e_\alpha = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{vmatrix}$  (где  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$ ), стали коллинеарны, а в итоге  $\langle x_3 \rangle, e_\alpha, \langle x_1' \rangle$  стали компланарны. Для этой сферической ротации используем другой тензорный угол  $\beta_{12}$ . Отметим, что при  $n = 2$  его скалярный собственный угол  $\beta_{12}$  совпадает с углом  $\alpha_1$ . Поэтому искомое ротационное преобразование в данном случае имеет вид:

$$\text{rot } \beta_{12}$$

$\cos \alpha_1$	$-\sin \alpha_1$	0
$\sin \alpha_1$	$\cos \alpha_1$	0
0	0	1

Далее в новом трёхмерном декартовом базисе  $\tilde{E}$  применяем обычную двумерную каноническую форму для данной элементарной ротации, действующей именно в плоскости  $\langle x_1', x_3 \rangle$ , но с учётом того, что отсчёт угла выполняется от оси  $\langle x_3 \rangle$  по часовой стрелке, а по отношению к оси  $\langle x_1' \rangle$  – против часовой стрелки:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}}$$

$\cos \varphi$	0	$-\sin \varphi$
0	1	0
$\sin \varphi$	0	$\cos \varphi$

Затем возвращаемся в исходный трёхмерный базис  $\tilde{E}_1$ , осуществляя обратную ротацию:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{3 \times 3} = \text{rot } \beta_{12} \cdot \{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}} \cdot \text{rot } \beta_{12}'.$$
 (315)

Нетрудно убедиться, что в итоге после этих операций получаем вышеуказанную формулу (313).

Для вывода общей формулы (314) используем аналогичную схему. Применим такое ротационное преобразование дополнительного декартова суббазиса, чтобы новая 1-я ось координат, вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_a = \{\cos \alpha_k\}$  (где  $\sum_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k = 1$ ) и реперная ось  $\langle x_{n+1} \rangle$

стали компланарны. Для этого используем *последовательно* другие тензорные углы сферических координат радиус-вектора угла ротации:  $\beta_{12}$  в плоскости  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ;  $\beta_{1'3}$  в плоскости  $\langle x_1', x_3 \rangle$ ; ...,  $\beta_{1''n}$  в плоскости  $\langle x_1'', \dots, x_n \rangle$ . Причём из тригонометрических соображений имеем:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{12} &= \cos \alpha_1 / \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}, \\ \cos \beta_{1'3} &= \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2} / \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3}, \\ &\dots \\ \cos \beta_{1''n} &= \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_{n-1}} = \sin \alpha_n. \end{aligned}$$
 (316)

Последовательные ротации осуществляют матрицы  $\text{rot } \beta_{12}$ ,  $\text{rot } \beta_{1'3}$ , ...:

$$\begin{array}{c} \text{rot } \beta_{12} \qquad \qquad \qquad \text{rot } \beta_{1'3} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cos \beta_{12} & -\sin \beta_{12} & \\ \hline \sin \beta_{12} & \cos \beta_{12} & \\ \hline Z & & \\ \hline \end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cos \beta_{1'3} & 0 & -\sin \beta_{1'3} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \sin \beta_{1'3} & 0 & \cos \beta_{1'3} \\ \hline Z' & & I_{n-2} \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

В итоге приходим к базису простейшей  $2 \times 2$  клеточной формы элементарной ротации:

$$\tilde{E} = \text{rot } \beta \cdot \tilde{E}_1,$$
 (317)

где  $\text{rot } \beta = \text{rot } \beta_{12} \cdot \text{rot } \beta_{1'3} \cdot \dots \cdot \text{rot } \beta_{1''n}$ . Теперь уже в этом декартовом базисе  $\tilde{E}$  придаём двумерную каноническую форму данной элементарной ротации в плоскости  $\langle x_1'', \dots, x_{n+1} \rangle$ :

$$\begin{array}{c} \{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cos \varphi & 0' & -\sin \varphi \\ \hline 0 & I_{n-1} & 0 \\ \hline \sin \varphi & 0' & \cos \varphi \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

Затем возвращаемся в исходный базис  $\tilde{E}_1$ , осуществляя обратную ротацию:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{(n+1) \times (n+1)} = \text{rot } \beta \cdot \{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}} \cdot \text{rot}' \beta. \quad (318)$$

После этих операций с учётом соотношений (316) получаем формулу (314). Это нетрудно проверить прямым вычислением. Аналогично, для отрицательного угла элементарной ротации (как угла в той же тригонометрической плоскости) имеем:

$$\{\text{rot } (-\Phi)\}_{(n+1) \times (n+1)} = \text{rot } \beta \cdot \{\text{rot } (-\Phi)\}_{\text{can}} \cdot \text{rot}' \beta. \quad (319)$$

Если изучается движение точечного элемента, вектора, прямой или гиперплоскости вне связи с другими элементами, то активные и пассивные модальные преобразования информативно полно задаются с использованием только элементарных ротационных матриц. Переход к другим, элементарно связанным (с исходным) декартовым базисам осуществляется в обоих базисах (317) соответственно как

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{E}_2 = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1, \\ \tilde{E}_{\text{II}} = \{\text{rot } \Phi_{12}\}_{\text{can}} \cdot \tilde{E}_1. \end{array} \right\} \quad (320)$$

При этом координаты указанных геометрических объектов преобразуются пассивно, как для тензоров валентности 1:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^{(2)} = \text{rot } (-\Phi_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \\ \mathbf{u}^{(\text{II})} = \{\text{rot } (-\Phi_{12})\}_{\text{can}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}. \end{array} \right\} \quad (321)$$

( $\mathbf{u}^{(1)} = \text{rot } (-\beta) \cdot \mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(\text{II})} = \text{rot } (-\beta) \cdot \mathbf{u}^{(2)}$ )

Таким образом, в этой главе сформулированы основные положения тензорной тригонометрии в евклидовой и квазиеуклидовой версии. Евклидова (антиевклидова) тензорная тригонометрия и геометрия могут рассматриваться как случай с единичным (отрицательно-единичным) рефлектор-тензором, когда формально допустимо применение любого срединного рефлектора угла из их же полного множества, отвечающего пространству данной размерности. (Соответственно квадратичные метрики тогда – евклидова и антиевклидова). На ряде примеров был продемонстрирован ряд возможностей, которые открывает тензорная тригонометрия для применения в линейной алгебре и аналитической геометрии.

## Глава 6. Тензорная псевдоевклидова тригонометрия

### § 6.1. Гиперболические тензорные тригонометрические функции и рефлекторы

Модальное преобразование (271) порождает псевдогиперболические углы и функции из исходных сферических. Угол  $\{i\Phi\}$  имеет гиперболический характер. Псевдогиперболическая геометрия именно во внешнем – тензорном варианте реализуется в комплексном бинарном (вещественно-мнимом) *особом* псевдоевклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^{n+q},$  со структурой, задаваемой срединным рефлектором угла или общее – тригонометрическим рефлектор-тензором. Например, из (271) имеем:  $\{\sqrt{I}\}_S = \tilde{E}_0'^{-1} \cdot \tilde{E}_0^{-1}$ . Скалярное произведение в данном пространстве тождественно таковому в исходном евклидовом пространстве:

$$z' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot z = (\tilde{E}_0'^{-1} \cdot z)' \cdot (\tilde{E}_0^{-1} \cdot z) \equiv x' \cdot x.$$

Само по себе особое комплексное псевдоевклидово пространство не представляет интереса. Однако в нём весьма просто осуществляется переход от сферических понятий к гиперболическим. Обратный переход осуществляется в комплексном бинарном квазиеуклидовом пространстве. При этом используются псевдоаналоги углов (§ 4.2):

$$\Phi \rightarrow -i\Phi \rightarrow \Gamma (\phi_j \rightarrow -i\phi_j \rightarrow \gamma_j), \quad (322)$$

$$\Gamma \rightarrow i\Gamma \rightarrow \Phi (\gamma_j \rightarrow i\gamma_j \rightarrow \phi_j). \quad (323)$$

Указанное соответствие определяется здесь как *сферическо-гиперболическая аналогия абстрактного типа*. Углы-аналоги при этой замене имеют абстрактный смысл (но при сохранении бинарной тензорной структуры). Далее углы могут использоваться конкретно. В частности, применив к (295), (297) или более широко к (277)–(286) абстрактную аналогию по схеме (322), получаем гиперболические аналоги в *вещественном* псевдоевклидовом пространстве с тем же рефлектор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S,$  в том числе в канонической форме в тригонометрическом базисе диагонального косинуса.

$$R_w \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma_j & \operatorname{sh} \gamma_j \\ \operatorname{sh} \gamma_j & \operatorname{ch} \gamma_j \end{pmatrix} \cdot R'_w = \operatorname{ch} \Gamma + \operatorname{sh} \Gamma = \operatorname{Roth} \Gamma = \operatorname{Roth}' \Gamma = \exp \Gamma, \quad (324)$$

$$\operatorname{ch} \Gamma - \operatorname{sh} \Gamma = \operatorname{Roth}^{-1} \Gamma = \operatorname{Roth} (-\Gamma) = \exp (-\Gamma). \quad (325)$$

Это гиперболическая ротационная матрица-функция моторного угла  $\Gamma$  или  $(-\Gamma)$ .

$$R_w \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sch} \gamma_j & -\operatorname{th} \gamma_j \\ \operatorname{th} \gamma_j & \operatorname{sch} \gamma_j \end{pmatrix} \cdot R'_w = \operatorname{sch} \Gamma + i \cdot \operatorname{th} \Gamma = \operatorname{Defh} \Gamma, \quad (326)$$

$$\operatorname{sch} \Gamma - i \cdot \operatorname{th} \Gamma = \operatorname{Defh}^{-1} \Gamma = \operatorname{Defh} (-\Gamma) = \operatorname{Defh}' \Gamma. \quad (327)$$

Это гиперболическая деформационная матрица-функция моторного угла  $\Gamma$  или  $(-\Gamma)$ .

$$R_w \cdot \begin{pmatrix} +\operatorname{ch} \gamma_j & \pm \operatorname{sh} \gamma_j \\ \mp \operatorname{sh} \gamma_j & -\operatorname{ch} \gamma_j \end{pmatrix} \cdot R'_w = \operatorname{ch} \tilde{\Gamma} \mp i \cdot \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}. \quad (328)$$

Это гиперболически ортогональный рефлектор по отношению к тензору  $\{\sqrt{I}\}_S$ .

$$R_w \cdot \begin{pmatrix} +\operatorname{sch} \gamma_j & \mp \operatorname{th} \gamma_j \\ \mp \operatorname{th} \gamma_j & -\operatorname{sch} \gamma_j \end{pmatrix} \cdot R'_w = \operatorname{sch} \tilde{\Gamma} \mp \operatorname{th} \tilde{\Gamma}. \quad (329)$$

Это гиперболически косоугольный рефлектор по отношению к тензору  $\{\sqrt{I}\}_S$ . (В этих определяющих формулах  $\tilde{\Gamma}$  – гиперболический проективный угол,  $\Gamma$  – гиперболический моторный угол.)

В *псевдоевклидовой* тригонометрии срединный рефлектор с максимальным тригонометрическим рангом угла задаёт не только тригонометрический базис, но и рефлектор-тензор *ориентированного псевдоевклидова пространства*  $\langle P^{n+q} \rangle$ :

$$\operatorname{Ref} \{\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}\}^\oplus = \{\sqrt{I}\}_S = R_w \cdot I^\oplus \cdot R'_w \quad (\tau = \tau_{\max} = q).$$

Ему же отвечает некоторое собственное подмножество нуль-простых матриц  $\langle B_P \rangle$ . Применяя принцип бинарности с учётом (271) и (324), получаем аннигилирующее соотношение – аналог такового для сферической ортогональной матрицы:

$$\operatorname{Roth} \Gamma \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \operatorname{Roth} \Gamma = \{\sqrt{I}\}_S. \quad (330)$$

В свою очередь, модальное преобразование, обратное (271), производит псевдосферические углы и функции из гиперболических. Тензорный угол  $\{\tilde{\Gamma}\}$  имеет сферический характер. Псевдосферическая тригонометрия в тензорном варианте реализуется в комплексном квазиевклидовом пространстве с бинарной структурой, согласно (271). Скалярное произведение в данном пространстве тождественно таковому в исходном псевдоевклидовом пространстве:

$$\mathbf{z}' \cdot \mathbf{z} = (\tilde{E}_0^{-1} \mathbf{x})' \cdot (\tilde{E}_0^{-1} \mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \mathbf{x}.$$

Такого вида пространство обычно применяют как комплексный квазиевклидов аналог вещественному псевдоевклидову пространству. (Впервые оно было введено Пуанкаре в 1905г. как метрическое пространство с группой преобразований Лоренца.) Далее, применив к псевдосферическим понятиям абстрактную аналогию по схеме (323), получаем первичные сферические аналоги в вещественном евклидовом пространстве. Это приводится, конечно, только для завершения в целом картины абстрактной аналогии, так как в итоге круг преобразований замкнулся.

С применением абстрактной сферическо-гиперболической аналогии получаем формулы связи проективных и моторных углов и их функций через срединный рефлектор (268)–(270). Например, имеем:

$$-i\tilde{\Gamma}_{12} \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_{12}\}^\oplus = \Gamma_{12} = +\text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_{12}\}^\oplus \cdot i\tilde{\Gamma}_{12}.$$

Для описания сферических и гиперболических преобразований на какой-либо собственной плоскости/псевдоплоскости (поклонительно) далее используется общая тригонометрическая диаграмма. Тут изначально нет какой-либо связи между вещественными сферическими и гиперболическими углами, что характерно для абстрактной аналогии. Для того чтобы в исходном декартовом базисе  $\tilde{E}_1$  установить отношение изоморфизма между сферическими и гиперболическими тригонометрическими функциями, нужно задать какую-либо однозначную взаимосвязь углов-аргументов.

## § 6.2. Сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа

Обратим внимание на то, что множества значений сферических и гиперболических синусов и тангенсов скалярных углов тождественны:

$$\sin \varphi \equiv \text{th } \gamma, \quad \text{tg } \varphi \equiv \text{sh } \gamma. \quad (331)$$

Отсюда между углами-аргументами устанавливается взаимосвязь:

$$\gamma = \gamma(\varphi) = \text{Arth}(\sin \varphi) = \text{Arsh}(\tg \varphi) = \ln(\sec \varphi + \tg \varphi),$$

$$\varphi = \varphi(\gamma) = \text{arctg}(\sh \gamma) = \arcsin(\th \gamma) = \ln(\operatorname{sch} \gamma + i \cdot \operatorname{th} \gamma) \cdot (-i).$$

Согласно тригонометрической диаграмме (рис. 3), главные значения сферических углов, как и ранее (гл. 5), берутся в интервале  $\varphi = -\pi/2 \div +\pi/2$ . При этом значения сферического косинуса и секанса для них неотрицательны. Поэтому тождества (331) можно дополнить ещё двумя аналогами:

$$\cos \varphi \equiv \operatorname{sch} \gamma \geq 0, \quad \sec \varphi \equiv \operatorname{ch} \gamma \geq 0. \quad (332)$$

При тригонометрических преобразованиях планаров и двухватентных тензоров вполне достаточно использовать вышеуказанный интервал для собственных сферических углов. На тождествах (331) базируется *сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа*. Она же есть *синус-тангенсная аналогия*. В её тензорном варианте, или с тождествами по бинарным клеткам, эта аналогия представляется в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \Phi \equiv \operatorname{th} \Gamma, \quad \tg \Phi \equiv \operatorname{sh} \Gamma, \\ \cos \Phi \equiv \operatorname{sch} \Gamma, \quad \sec \Phi \equiv \operatorname{ch} \Gamma \end{array} \right\} \quad (333)$$

$$(\varphi_i = -\pi/2 \div +\pi/2, \quad \gamma_i = -\infty \div +\infty).$$

Далее в исходном единичном базисе  $\tilde{E}_1$  она распространяется на все типы тригонометрических матриц-функций:

$$\text{Def } \Phi \equiv \text{Roth } \Gamma, \quad (334)$$

$$\text{Rot } \Phi \equiv \text{Defh } \Gamma. \quad (335)$$

Отсюда следует функциональная связь обоих углов моторного типа:

$$\Gamma = \Gamma(\Phi) = \ln \text{Def } \Phi, \quad i\Phi = i\Phi(\Gamma) = \ln \text{Defh } \Gamma. \quad (336)$$

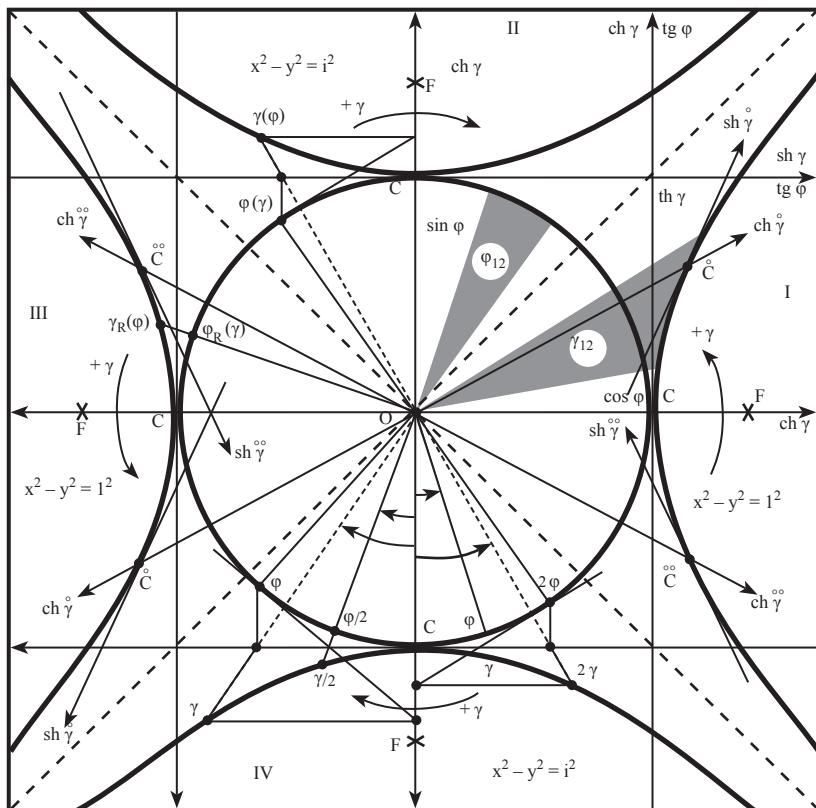
Характеристические рефлекторы (178), (179), (211), (212) в том же варианте принимают вид:

$$\text{Ref } \{BB'\} = \operatorname{sch} \tilde{\Gamma}_B - \operatorname{th} \tilde{\Gamma}_B, \quad (337)$$

$$\text{Ref } \{B'B\} = \operatorname{sch} \tilde{\Gamma}_B + \operatorname{th} \tilde{\Gamma}_B, \quad (338)$$

$$\text{Ref } \{B\} = \operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B - i \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B, \quad (339)$$

$$\text{Ref } \{B'\} = \operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B + i \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B. \quad (340)$$



**Рис. 3.** Тригонометрическая диаграмма на плоскости/псевдоплоскости в правом универсальном базисе и сферическо-гиперболическая аналогия:  $\phi$  – сферический угол,  $\gamma$  – гиперболический угол; I, II, III и IV суть 1-й, 2-й, 3-й и 4-й гиперболические квадранты для отображения скалярных гиперболических углов на псевдоплоскости;  $\overset{\circ}{\gamma}$  и  $\overset{\circ}{\gamma}$  – положительный и отрицательный углы гиперболической ротации в универсальном базисе, определяемые парой вещественных гипербол, как примеры в 1-м и 3-м квадрантах;  $\phi(\gamma)$  и  $\gamma(\phi)$  – примеры сферическо-гиперболической аналогии синус-тангенсного типа (во 2-м квадранте);  $\varphi_R(\gamma)$  и  $\gamma_R(\phi)$  – примеры сферическо-гиперболической аналогии тангенс-тангенсного типа (в 3-м квадранте); в 4-м квадранте даны примеры бисекции (слева) и удвоения (справа) гиперболического угла в универсальном базисе с использованием вышеуказанных аналогий.

С использованием сферическо-гиперболической аналогии обоих типов моторные матрицы-функции преобразуются друг в друга по нижеуказанному *квартовому кругу*:

$$\begin{array}{c} \text{Rot } (i\Gamma) \equiv \text{Defh } (-i\Phi) \leftrightarrow \text{Roth } \Gamma \equiv \text{Def } \Phi \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{Rot } \Phi \equiv \text{Defh } \Gamma \leftrightarrow \text{Roth } (-i\Phi) \equiv \text{Def } (i\Gamma). \end{array} \quad (341)$$

Для тригонометрически согласованных гиперболических ротационных матриц и ортогональных рефлекторов действуют Правила №2 и №3 (§ 5.6). Для скалярных тригонометрических функций правила выполняются автоматически, так как у них  $n = 2$ . В частности, имеем:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m (\sec \varphi_i \pm \operatorname{tg} \varphi_i)^{h_i} &\equiv \prod_{i=1}^m (\operatorname{ch} \gamma_i \pm \operatorname{sh} \gamma_i)^{h_i} = \exp \left( \sum_{i=1}^m \pm h_i \gamma_i \right) = \exp \gamma = \\ &= \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \equiv \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi \\ &(-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2). \end{aligned}$$

Синус-тангенсная аналогия позволяет придать гиперболически ортогональную форму ранее рассмотренным собственным *аффинным* проекторам, квазиобратной матрице и рефлекторам, получая те же соотношения, что и для сферических прототипов, но в гиперболическом варианте, а именно:

$$\text{Ref } \{B'\} \cdot \text{Ref } \{B\} = (\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B + \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B) \cdot (\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B - \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B) = \text{Roth } 2\Gamma_B. \quad (342)$$

То есть двукратная рефлексия типа  $\{(\sqrt{I})_h' \cdot (\sqrt{I})_h\}$ , где  $(\sqrt{I})_h \neq (\sqrt{I})_h'$  – простой несимметричный корень, есть гиперболическая ротация по аналогии с (245):

$$\text{Roth } (\pm \Gamma_B) = [(\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B \pm i \cdot \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B) \cdot (\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B \mp i \cdot \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B)]^{1/2}. \quad (343)$$

Здесь из матрицы в квадратных скобках извлекается арифметический корень и он же в данном случае гиперболический *тригонометрический* корень, аналогичный сферическому. Для пары неориентированных векторов или планаров ранга 1 при условии  $\mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2 \neq 0$  однозначно вычисляется собственная *элементарная* ротационная матрица ( $\tau = 1$ ):

$$\begin{aligned} \text{Roth } \Gamma_{12} &= [(I - 2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}') \cdot (I - 2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}')]^{1/2} = \\ &= \left[ I - 2 \cdot \left( \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_1} + \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_2} \right) + 4 \operatorname{ch}^2 \gamma_{12} \cdot \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (344)$$

где  $\overleftarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}' = \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_2}$ ,  $\overleftarrow{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}' = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_1}$ , в том числе  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$ .

С использованием формулы взаимосвязи углов (336) вычисляется тензорный *сферический* угол  $\alpha_B$  в соотношении (288):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Def } \Phi_B \equiv \text{Roth } \Gamma_B, \\ \text{Def } \alpha_B \equiv \text{Roth } 2\Gamma_B, \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_B = -i \cdot \ln \{\text{Defh} [2\ln (\text{Def } \Phi_B)]\}.$$

Согласно синус-тангенсной аналогии, срединный рефлектор тензорного угла выражается в 4-х тождественных вариантах:

$$\text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}\}^\oplus = \text{Ref } \{\sec \tilde{\Phi}\}^\oplus \equiv \text{Ref } \{\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}\}^\oplus = \text{Ref } \{\operatorname{sch} \tilde{\Gamma}\}^\oplus. \quad (345)$$

Умножая матрицы в квартовом круге (341) справа на срединный рефлектор, переходим к квартовому кругу для рефлекторов. Повторив эту операцию, возвращаемся к исходному моторному варианту. Также нетрудно получить формулы-аналоги (336) для взаимосвязи между проективными углами. Изначально проективные гиперболические углы и функции можно определить по формулам проективной евклидовой тригонометрии, но с использованием синус-тангенсной аналогии. Применяя её же к модальным преобразованиям (303), (304), получаем соотношения, родственные (252), (302):

$$\text{Ref}\{B'\} = \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Ref}\{B\} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B) = \text{Ref}\{\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \text{Ref}\{B\} \cdot \text{Ref}\{\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus, \quad (346)$$

$$\overset{\curvearrowleft}{B}' = \text{Roth } \Gamma_B \cdot \overset{\curvearrowleft}{B} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B) = \text{Ref } \{\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \overset{\curvearrowleft}{B} \cdot \text{Ref } \{\operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus. \quad (347)$$

На множестве ротационных модальных матриц  $\langle T_B \rangle$ , выполняющих операции типа (346), (347), матрица Roth  $\Gamma_B$ , получаемая однозначно из (343), имеет тригонометрическое подпространство *минимальной* размерности. Теперь стало возможным также вычислить ротационный вариант модальной матрицы для приведения собственных аффинных проекторов к диагональной форме, то есть развивая дальше (311), (312):

$$\begin{aligned} R_w' \cdot \text{Roth } \Gamma_B / 2 \cdot \overset{\curvearrowleft}{B} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B / 2) \cdot R_w &= D \overset{\curvearrowleft}{\{B\}}, \\ R_w' \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B / 2) \cdot \overset{\curvearrowleft}{B}' \cdot \text{Roth } \Gamma_B / 2 \cdot R_w &= D \overset{\curvearrowleft}{\{B'\}}. \end{aligned} \quad (348)$$

Точно также, как в тензорной евклидовой тригонометрии – см. в § 5.6 формулы (249), (251), – здесь соотношения (346), (347) имеют место для общих ротационных матриц из множества  $\langle T_B \rangle \equiv \langle \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Rot } \Theta_B \rangle$  с учётом транспонирования. Причём  $\Theta_B$  – сферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Gamma_B$ , или *ортосферический угол*. Для этих тензорных углов и только для них выполняются соотношения:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \text{Roth } \Gamma_B = \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus = \text{Roth}(-\Gamma_B) \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B), \\ \text{Rot}' \Theta_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \text{Rot } \Theta_B = \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus = \text{Rot } \Theta_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \text{Rot}' \Theta_B. \end{array} \right. \quad (349)$$

Соотношения (349) лежат в основе как ротационной *псевдоевклидовой тригонометрии* с вышеуказанным срединным рефлектором в качестве вводимого независимо рефлектор-тензора, так и *внешней гиперболической геометрии*. Последняя по существу есть *общая геометрия постоянной отрицательной кривизны* (с гиперболической тригонометрией в ней). Эта геометрия реализуется на специальных гиперболоидах, вложенных в псевдоевклидово пространство, задаваемое рефлектор-тензором и псевдоевклидовой метрикой.

### § 6.3. Фундаментальный рефлектор-тензор в квазиевклидовой и псевдоевклидовой интерпретации

Применению гиперболических и сферических матриц в тензорной тригонометрии и в теории собственных проекторов нужно дать надлежащее обоснование, имея ввиду используемые метрические пространства и допустимые в них преобразования базисов. Выберем в исходном арифметическом (аффинном) пространстве координатный базис с единичной матрицей вектор-столбцов  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ . Далее вводим в этом пространстве *совершенно независимым образом* рефлектор-тензор  $\text{Ref} \equiv \{\sqrt{I}\}_S$ , который придаёт ему, в частности, определённую ориентацию. Во-первых, в этом пространстве как исходно аффинном допускается операция параллельного переноса, в том числе базиса. Во-вторых, определим в  $\tilde{E}_1$  ротационные преобразования 3-х типов:

$$\langle \text{Rot } \Phi \rangle: \text{Rot } \Phi \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot } \Phi = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Rot}(-\Phi) \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot}(-\Phi)$$

– основные сферические ротации,

$$\langle \text{Roth } \Gamma \rangle: \text{Roth } \Gamma \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth } \Gamma = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Roth}(-\Gamma) \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth}(-\Gamma)$$

– гиперболические ротации,

$$\langle \text{Rot } \Theta \rangle: \text{Rot}' \Theta \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot } \Theta = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Rot } \Theta \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot}' \Theta – \text{ортогональные сферические ротации (по отношению к предыдущим двум).}$$

*Квазиевклидово пространство*  $\langle Q^{n+q} \rangle$  (ориентированное) определяется евклидовой квадратичной метрикой и рефлектор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S$ , задающим допустимые преобразования, в том числе базиса, вида:

$$\tilde{E} = \text{Rot } \Phi \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1. \quad (350)$$

Это суть *ротационно связанные квазидекартовы базисы*. Именно в таком пространстве воплощается квазиевклидова тригонометрия в правых квазидекартовых базисах.

Псевдоевклидово пространство  $\langle P^{n+q} \rangle$  (ориентированное) определяется псевдоевклидовой квадратичной метрикой и рефлектор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S$ , задающим допустимые преобразования, в том числе базиса, вида:

$$\tilde{E} = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1. \quad (351)$$

Это суть *ротационно связанные псевдодекартовы базисы*. Именно в таком пространстве воплощается псевдоевклидова тригонометрия в правых псевдодекартовых базисах.

Кроме того, определим *универсальные базисы* (правые):

$$\langle \tilde{E}_{1u} \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Theta \rangle \leftrightarrow \begin{cases} \tilde{E}'_{1u} \cdot \tilde{E}_{1u} = I, \\ \tilde{E}'_{1u} \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \tilde{E}_{1u} = \{\sqrt{I}\}_S. \end{cases} \quad (\det \tilde{E}_{1u} = +1) \quad (352)$$

В частности, сюда входит исходный единичный базис  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , то есть простейший по форме. Универсальные базисы принадлежат пересечению множеств ротационно связанных базисов обоих вышеуказанных типов. Благодаря этому в них реализуется совместно квазиеуклидова и псевдоевклидова тригонометрия, а, следовательно, и сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа. (Например, в теории относительности в универсальных базисах описывается движение с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя.)

Пусть  $B$  – нуль-простая матрица какого-то линейного преобразования в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ . Введём рефлектор-тензор, равный срединному рефлектору её характеристического тензорного угла, с переходом при этом в ориентированное псевдоевклидово пространство:

$$\{\sqrt{I}\}_S = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^\oplus \equiv \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus. \quad (353)$$

В любом универсальном базисе, в том числе в  $\{I\}$ , проекторы  $\overleftarrow{BB'}$  и  $\overrightarrow{BB'}$  сферически ортогональны друг к другу, то есть

$$\overleftarrow{BB'} \cdot I \cdot \overrightarrow{BB'} = Z,$$

а проекторы  $\overleftarrow{B}$  и  $\overrightarrow{B}$  гиперболически ортогональны друг к другу с учётом (347), то есть

$$(B)' \cdot \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \overrightarrow{B} = \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^\oplus \cdot \overleftarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = Z.$$

Соответственно  $B^-$  есть гиперболически ортогональная квазиобратная матрица. Подпространства  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \ker B \rangle$  образуют гиперболически ортогональную прямую сумму тогда и только тогда, когда  $B$  нуль-простая. Для проекторов  $B$  и  $B^-$  собственные векторы

или подпространства, относящиеся к различным собственным значениям («+1» и «0»), гиперболически ортогональны. Эквиранговые проекторы  $\tilde{B}$  и  $\tilde{B}'$  ( $B$  и  $\tilde{B}'$ ) и связанные с ними планары преобразуются друг в друга гиперболической ротацией (347) как гиперболически ортогональные тензоры и тензорные объекты валентности 2. Проектор  $\tilde{B}$  проецирует гиперболически ортогонально на  $\langle \text{im } B \rangle$ , а проектор  $\tilde{B}'$  проецирует гиперболически ортогонально на  $\langle \ker B \rangle$ . Сферически и гиперболически ортогональные собственные проекторы принадлежат своим подмножествам множества идемпотентных матриц. Здесь  $\langle \tilde{B}\tilde{B}' \rangle$  – симметричные, а  $\langle B \rangle$  – несимметричные идемпотентные матрицы. Соответствующую гиперболическую трансформацию претерпевают проективные формулы (186) – (197). В символическом октаэдре (рис.1), проведя диагональ  $RS$ , с учётом (347) имеем два псевдоравнобедренных тензорных треугольника  $RZS$  и  $RIS$  с равными гиперболическими углами  $\angle RZS \equiv \angle RIS \equiv \Gamma_B$ .

Для гиперболически ортогональной ротационной матрицы имеют место аналоги формул Муавра и Эйлера:

$$\text{Roth}^m \Gamma = \text{ch} \{m\Gamma\} + \text{sh} \{m\Gamma\} = \exp \{m\Gamma\} = \text{Roth} \{m\Gamma\}.$$

Её свойства, безотносительно к углу ротации, те же, что у деформационной сферической матрицы. Она симметрична и положительно определена:  $\mu_{2j} = \text{ch} \gamma_j + \text{sh} \gamma_j > 0$ ,  $\mu_{2j+1} = \mu_{2j}^{-1} = \text{ch} \gamma_j - \text{sh} \gamma_j > 0$  и, возможно,  $\mu_k = +1$ . Любое положительное число и мультиплитативно обратное ему взаимно-однозначно представляются через скалярный гиперболический угол, в том числе в форме  $2 \times 2$ -матрицы.

Естественное обобщение бинарной гиперболической ротационной матрицы есть положительно определённая симметричная матрица с единичным детерминантом. В тригонометрическом базисе она разбивается на единичный блок и специальные симметричные клетки с единичными детерминантами. В базисе диагональной формы она представляется как  $S^\oplus = \exp \{\gamma_{ii}\}$ , где по клеткам  $\sum \gamma_{ii} = 0$ . Согласно полярному разложению, приведённое модальное преобразование  $V$  без рефлексий двухвалентных тензоров представляется произведением сферической и обобщённой гиперболической ротационных матриц при одной и той же ориентации базиса, то есть  $\det V > 0$ . В псевдоевклидовой геометрии, как и в евклидовой, применяются матрицы только бинарной тригонометрической структуры.

В случае *ориентированного* псевдоевклидова пространства для приведения  $\text{Roth } \Gamma$  к  $W$ -форме используется матрица  $R_W$ , выходящая из множества матриц, согласованных с рефлектор-тензором  $\{\sqrt{\Gamma}\}_S \notin \langle W \rangle$ .

Но заметим, что некоторая модальная матрица  $R_W$  приводит совместно Roth  $\Gamma$  к W-форме и  $\{\sqrt{I}\}_S$  к D-форме:

$$R_W \cdot (R_W' \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot R_W) \cdot (R_W' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot R_W) \cdot R_W' =$$

$$= R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline ch \gamma_j & sh \gamma_j \\ \hline sh \gamma_j & ch \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \{I^\oplus\} & \\ \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot R_W',$$

+1                            +1

так как, согласно (330),  $\text{Roth } \Gamma \cdot \{\sqrt{I}\}_S = \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth } (-\Gamma)$  и действует Правило № 3.

#### § 6.4. Скалярная тригонометрия на псевдоплоскости

Диагональный рефлектор-тензор  $\{I^\oplus\}$  (см. выше) отвечает *неориентированному* пространству, бинарная структура которого согласована с координатными осями. В тригонометрическом базисе гиперболическая ротационная матрица Roth  $\Gamma$  имеет каноническую W-форму (324). С другой стороны, для  $i$ -й  $2 \times 2$ -клетки две асимптоты квадрогиперболы, или главная и побочная диагонали тригонометрического базиса на  $i$ -й псевдоплоскости (рис. 3) задают две координатные оси её же диагональной формы. Ввиду согласованности рефлектор-тензора с ротационными матрицами эти две асимптоты с квадрогиперболой остаются на месте при гиперболическом ротационном преобразовании соответствующей им псевдоплоскости. В исходном псевдоевклидовом пространстве размерности более двух этим геометрическим объектам, как известно, отвечают изотропный конус (асимптотическое плоское подпространство) и вложенные в него полостные гиперболоиды. На какой-либо  $i$ -й псевдоплоскости данного пространства, рассекающей гиперболоиды по квадрогиперболе (рис. 3), осуществляется чисто гиперболическая ротация, соответствующая  $i$ -й  $2 \times 2$ -клетке Roth  $\Gamma$ .

Отсчёт значений скалярных собственных углов  $\gamma_i$  выполняется во всех гиперболических квадрантах в направлении к главной диагонали. Гиперболический угол  $\gamma$ , как известно, измеряется либо псевдоевклидовой длиной дуги гиперболы, либо удвоенной площадью гиперболического сектора на псевдоплоскости (при  $\hat{R} = 1$ ):

$$\hat{l} = \hat{R} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sqrt{(d \operatorname{sh} \gamma)^2 - (d \operatorname{ch} \gamma)^2} = \hat{R} (\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$\hat{S} = \hat{R} \cdot \left[ \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \operatorname{sh} \gamma \, d \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \gamma \cdot \operatorname{ch} \gamma / 2 \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} = 1/2 \hat{R} \cdot (\gamma_2 - \gamma_1).$$

Здесь единичный радиус-вектор всегда гиперболически ортогонален своей гиперболе в точке касания. В частности, он и касательная задают новые гиперболически связанные оси координат. Фокусы гиперболы соответствует особый скалярный гиперболический угол  $\omega \approx 0,881$  рад;  $\operatorname{sh} \omega = 1$ ,  $\operatorname{ch} \omega = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{th} \omega = \sqrt{2}/2$ . Согласно синус-тангенсной аналогии конкретного типа,  $\phi(\omega) = \pi/4$ . Например,  $\sin(\pi/4 \pm i\omega) = 1 \pm \sqrt{2}/2 \cdot i$ ,  $\cos(\pi/4 \pm i\omega) = 1 \mp \sqrt{2}/2 \cdot i$ .

Другой вид сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа в  $\tilde{E}_1$  устанавливается через отношение изоморфизма между кажущимся сферическим углом  $\varphi_R$  и гиперболическим углом  $\gamma_R$ , если принять, что они задаются на плоскости/псевдоплоскости одним и тем же радиус-вектором (рис. 3). Указанная тригонометрическая аналогия определяется исходно через тождество тангенсов

$$\operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma \rightarrow \varphi_R = \varphi_R(\gamma) = \operatorname{arctg} \operatorname{th} \gamma \quad (-\pi/4 \leq \varphi_R \leq +\pi/4). \quad (354)$$

Другие функции связаны соотношениями:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \varphi_R \equiv \operatorname{sh} \gamma / \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma}, \quad \cos \varphi_R \equiv \operatorname{ch} \gamma / \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma}, \\ \operatorname{sh} \gamma_R \equiv \sin \varphi / \sqrt{\operatorname{cos} 2\varphi}, \quad \operatorname{ch} \gamma_R \equiv \cos \varphi / \sqrt{\operatorname{cos} 2\varphi}. \end{array} \right\} \quad (355)$$

Данное соответствие определяется как сферическо-гиперболическая тангенс-тангенсная аналогия. Например,  $\varphi_R(\omega) \approx 35^\circ$ . В принципе, возможно бесконечное количество вариантов аналогий конкретного типа, но все они сводятся к тождествам вида:

$$\operatorname{tg}(k_1 \cdot \varphi/2) \equiv \operatorname{th}(k_2 \cdot \gamma/2) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{sh}(k_2 \gamma), \quad \operatorname{tg}(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{sh}(k_2 \gamma), \\ \cos(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{sch}(k_2 \gamma), \quad \sec(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{ch}(k_2 \gamma). \end{array} \right. \quad (356)$$

Здесь  $-\pi/4 \leq k_1 \cdot \varphi/2 \leq +\pi/4$ .

Практический интерес представляют 4 варианта:

- 1)  $k_1 = k_2 = 1$  соответствует (331).
- 2)  $k_1 = k_2 = 2$  соответствует (354).
- 3)  $k_1 = 1, k_2 = 2$ .
- 4)  $k_1 = 2, k_2 = 1$ .

Если конкретную аналогию применить в первом и втором вариантах совместно, то чисто геометрически решаются (с помощью циркуля

и линейки) задачи удвоения и бисекции гиперболического угла в универсальном базисе (рис. 3):

$$a) \operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{th} \gamma, \quad \varphi_R = \varphi_R(\gamma), \quad \varphi = 2\varphi_R \rightarrow \operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{sh} 2\gamma;$$

$$\delta) \operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{sh} \gamma, \quad \varphi = \varphi(\gamma), \quad \varphi_R = \varphi/2 \rightarrow \operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma/2.$$

В этом случае имеет место неравенство

$$|\varphi_R(\gamma)| < |\varphi(\gamma)| < 2 \cdot |\varphi_R(\gamma)|. \quad (357)$$

Действительно,

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi \equiv \operatorname{sch} \gamma, \\ \cos 2\varphi_R \equiv \operatorname{sch} 2\gamma, \end{array} \right\} \rightarrow \cos \varphi > \cos(2\varphi_R);$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{sh} \gamma, \\ \operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma, \end{array} \right\} \rightarrow |\operatorname{tg} \varphi| > |\operatorname{tg} \varphi_R|.$$

В тензорной тригонометрии представляет особый интерес именно синус-тангенсная аналогия. Она устанавливает непосредственную взаимосвязь в любом универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  между преобразованиями и углами в квартовом круге (341). С применением синус-тангенсной аналогии устанавливаются тригонометрические формулы для плоского гиперболически прямоугольного треугольника. Последний определяется как треугольник на псевдоплоскости, у которого две стороны-катеты « $a$ » и « $b$ » принадлежат различным собственным подпространствам рефлектор-тензора, то есть с собственными значениями « $+1$ » и « $-1$ ». Катеты образуют прямой угол  $\delta = \pm \infty$  (в гиперболической метрике). Против него лежит гипotenуза « $g$ ». Если  $|b| > |a|$ , то гипotenуза треугольника находится внутри изотропного конуса и  $g^2 = b^2 - a^2$  (внутренний треугольник). Если  $|a| > |b|$ , то гипotenуза треугольника находится вне изотропного конуса и  $g^2 = a^2 - b^2$  (внешний треугольник). Если  $|a| = |b|$ , то гипotenуза лежит на поверхности изотропного конуса и  $g = 0$ . Против катета с меньшим модулем  $\operatorname{minimod} \langle a, b \rangle$  лежит угол  $\gamma$ . Против катета с большим модулем  $\operatorname{maximod} \langle a, b \rangle$  лежит угол  $\lambda$ . (Гипotenуза  $g$  в зависимости от её положения относительно изотропного конуса времениподобна или пространствуподобна – см. § 11.2.) Имеем:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq |\operatorname{cosh} \lambda| = |\operatorname{sh} \gamma| = 1/g \cdot |\operatorname{minimod} \langle a, b \rangle| = |\operatorname{tg} \varphi| = |\operatorname{ctg} \xi| \leq +\infty, \\ +1 \leq |\operatorname{cth} \lambda| = \operatorname{ch} \gamma = 1/g \cdot |\operatorname{maximod} \langle a, b \rangle| = \sec \varphi = |\operatorname{cosec} \xi| \leq +\infty, \\ -1 \leq \pm \operatorname{sch} \lambda = \operatorname{th} \gamma = \operatorname{minimod} \langle a, b \rangle / \operatorname{maximod} \langle a, b \rangle = \sin \varphi = \pm \operatorname{cos} \xi \leq +1. \end{array} \right\} \quad (358)$$

Здесь и далее  $\gamma$  и  $\lambda$  – основной и дополнительный гиперболические углы. Они не равнозначны в отличие от  $\varphi$  и  $\xi$  – основного и дополнительного сферических углов. В прямоугольном треугольнике на плоскости/псевдоплоскости синус-тангенсная аналогия устанавливает взаимно-однозначное соответствие между его тремя углами (в базисе  $\tilde{E}_1$ ):

$$\operatorname{th} \gamma \equiv \sin \varphi \leftrightarrow \{\gamma \rightarrow \varphi(\gamma), \quad \lambda \rightarrow d = \pi/2, \quad \delta \rightarrow \varphi(\lambda) = \xi\} \quad (359)$$

$$(\gamma \text{ или } \lambda = 0 \leftrightarrow \lambda \text{ или } \gamma = \pm \infty) \leftrightarrow (\varphi \text{ или } \xi = 0 \leftrightarrow \xi \text{ или } \varphi = \pm \pi/2);$$

$$-\infty < \operatorname{th}(\gamma + \lambda) = \sin \chi < +1 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\infty = -\delta < \gamma + \lambda < +\delta = +\infty \\ -\pi/2 = -d < \chi < +d = +\pi/2 \end{array} \right\}. \quad (360)$$

### § 6.5. Элементарные тензорные гиперболические тригонометрические функции

Сферическо-гиперболическую аналогию обоих типов (абстрактную и конкретную) можно использовать для упрощённого вычисления матриц элементарных структур в квартовом круге (341) – как моторных, так и рефлексивных, если уже известна структура для какой-либо матрицы из круга. Например, аналогично ранее найденным структурам (313), (314) устанавливаются структуры деформационных матриц:

$$\{\operatorname{def}(\pm \Phi)\}_{3 \times 3}$$

$1 + (\sec \varphi - 1) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$(\sec \varphi - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$\pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_1$
$(\sec \varphi - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 + (\sec \varphi - 1) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$\pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_2$
$\pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_2$	$\sec \varphi$

(361)

$$\{\operatorname{def}(\pm \Phi)\}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$I_{n \times n} + (\sec \varphi - 1) \cdot \{\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_a'\}$ $(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_a' = \overleftarrow{\mathbf{e}_a} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_a'})$	$\pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \mathbf{e}_a$
$\pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \mathbf{e}_a'$	$\sec \varphi$

(362)

Эти структуры как элементарные, подобно структурам (313), (314), выводятся из исходной  $2 \times 2$ -клетки (292) по тем же схемам модальных преобразований (315), (317), (318). И далее из полученных структур деформационных и ротационных сферических матриц-функций по синус-тангенсной аналогии выводятся родственные структуры ротационных и деформационных гиперболических матриц-функций:

$$\{\text{roth}(\pm\Gamma)\}_{4\times 4}$$

$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_1$
$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_2$
$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos^2 \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_3$
$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_2$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_3$	$\text{ch } \gamma$

$$\{\text{roth}(\pm\Gamma)\}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$I_{n \times n} + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \{\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_a'\}$ $(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_a' = \overleftarrow{\mathbf{e}_a} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_a})$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a$
$\pm \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a'$	$\text{ch } \gamma$

$$\{\text{defh}(\pm\Gamma)\}_{4\times 4}$$

$1 - (1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_1$
$-(1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 - (1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_2$
$-(1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$1 - (1 - \text{sch } \gamma) \cdot \cos^2 \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_3$
$\pm \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_2$	$\pm \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_3$	$\text{sch } \gamma$

Кроме того, та же гиперболическая ротационная матрица-функция выводится из сферической по аналогии *абстрактного* типа. А именно по схеме (322) вещественный синус в ротационной матрице  $\{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}}$  в (315) преобразуется в мнимый (284) и далее в гиперболический. Отсюда же видно, что обращение ротационных и деформационных матриц-функций сводится к весьма простой операции:  $\mathbf{e}_a \rightarrow (-\mathbf{e}_a)$ , или  $\text{rot } \pi \cdot \mathbf{e}_a = -\mathbf{e}_{a'}$ . В более общем случае при ротации в другой универсальный базис  $\tilde{\mathbf{E}}_{1u} = \text{rot } \Theta \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$  в указанных тригонометрических матрицах изменяются только координаты вектора направляющих косинусов (пассивно):  $\text{rot}' \Theta_{n \times n} \cdot \mathbf{e}_a = \text{rot} (-\Theta)_{n \times n} \cdot \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_{a'}$  в пределах того же евклидова подпространства. Матрицы (313), (314) представляют интерес для изучения движений в 2- и n-мерной сферической геометрии. Матрицы (363), (364) представляют интерес для изучения движений в 3- и n-мерной гиперболической геометрии. Матрицы (363), (365) представляют интерес для изучения преобразований в псевдоевклидовом пространстве Минковского, связанных с физическим движением.

## Глава 7. Тригонометрическая природа коммутативности и антисимметрии

### § 7.1. Коммутативность простых матриц

Биортогональные матрицы коммутативны и антисимметричны:  $B_1 \cdot B_2 = B_2 \cdot B_1 = -B_2 B_1 = Z$ . Они обязательно сингулярны:  $r_1 + r_2 \leq n$ . Простые биортогональные матрицы приводятся к диагональной форме в некотором общем базисе, причём  $D_1 \cdot D_2 = Z$ . С тригонометрической точки зрения достаточно рассмотреть отношения мультиплекативности только для несингулярных простых матриц, то есть без биортогональных блоков. Коммутативные простые матрицы, как известно, приводятся к диагональной форме в некотором общем базисе:

$$\begin{array}{c} D\{P_1\} \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline a_j & \\ \hline & a_k \\ \hline \end{array}} \end{array}, \quad \begin{array}{c} D\{P_2\} \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline b_j & \\ \hline & b_k \\ \hline \end{array}} \end{array}, \quad D\{P\} = V_{\text{col}}^{-1} \cdot P \cdot V_{\text{col}}.$$

Диагональность этих форм, а следовательно, и коммутативность матриц сохраняются при воздействии на любую из диагональных  $2 \times 2$ -клеток, например  $(j, k)$ , согласованных с ней модальных преобразований нижеуказанных простейших типов:

$$\begin{array}{c} V_1 \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline \pm c & 0 \\ \hline 0 & \mp c \\ \hline \end{array}} \end{array}, \quad \begin{array}{c} V_2 \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \mp d \\ \hline \pm d & 0 \\ \hline \end{array}} \end{array}.$$

Первое преобразование меняет направления осей координат и не затрагивает диагональной формы. Второе преобразование вызывает перестановку осей координат и диагональных элементов. Произведения таких простейших преобразований в любых сочетаниях, обусловленных размером матриц, составляют некоторое множество модальных матриц по отношению к данной диагональной форме как инвариантной структуре. При этом предполагается, что все собственные значения

каждой из матриц различны. В противном случае указанное множество расширяется за счёт тех преобразований, которые изменяют базис в пределах пересечения собственных подпространств  $P_1$  и  $P_2$ . Ввиду того, что рассматриваемые коммутативные матрицы с изменением базиса преобразуются как двухвалентные тензоры, вышеуказанные типы модальных матриц в чистых формах сводятся к тригонометрическим преобразованиям – ротационным и рефлективным:

$$\begin{array}{ccc} \text{Rot } (\pm \pi/2) & \text{Roth } (\pm i\pi/2) & \text{Ref} \\ \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \mp 1 \\ \hline \pm 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right), & \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \pm i \\ \hline \pm i & 0 \\ \hline \end{array} \right), & \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \pm c & 0 \\ \hline 0 & \mp c \\ \hline \end{array} \right). \end{array} \quad (366)$$

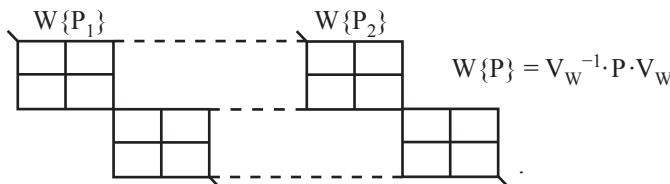
Следовательно, базис диагональной формы как простейшей структуры в данном случае можно определить с точностью до согласованных рефлексий или ротаций на тензорные углы  $\pm k \cdot \pi/2$  или  $\pm k \cdot i\pi/2$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (В гиперболической трактовке тензорному сферическому углу  $\pi/2$  отвечает бесконечный гиперболический аналог  $\Delta$ ; при этом как угловой аргумент возможен только он и нулевой угол.)

## § 7.2. Антикоммутативность пары простых матриц

Из антикоммутативности пары простых матриц следуют соотношения:

$$P_1^2 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1^2, \quad P_1 \cdot P_2^2 = P_2^2 \cdot P_1, \quad P_1^2 \cdot P_2^2 = P_2^2 \cdot P_1^2.$$

В соответствии с принципом бинарности (§ 5.6) антикоммутативные простые матрицы (без биортогональных блоков – см. § 7.1) приводятся к согласованным *бинарным* клеточным формам в некотором общем базисе:



Размерность таких несингулярных матриц обязательно чётная. Далее выполним общее модальное преобразование для обеих матриц  $P_1$  и  $P_2$  – причём такое, чтобы  $P_1$  стала диагональной. Тогда в новом общем базисе антикоммутативность этих простых матриц алгебраически возможна тогда и только тогда, когда согласованные  $2 \times 2$ -клетки имеют вид:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \left( \begin{array}{cc} +a_j & 0 \\ 0 & -a_j \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow{\text{---}} \begin{array}{c} P_2 \\ \left( \begin{array}{cc} 0 & b_{1j} \\ b_{2j} & 0 \end{array} \right) \end{array} . \quad (367)$$

Если же наоборот диагонализовать  $P_2$ , то

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{cc} 0 & a_{1j} \\ a_{2j} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{---}} \left( \begin{array}{cc} +b_j & 0 \\ 0 & -b_j \end{array} \right) , \end{array} \quad (368)$$

$$\text{где } a = \sqrt{a_1 \cdot a_2}, \quad b = \sqrt{b_1 \cdot b_2}.$$

Ковариантная модальная матрица столбцов, приводящая контрадиагональную форму в (367) и (368) к диагональной, вычисляется, например, с использованием результатов § 2.2. Модальное преобразование для самого общего случая представляется в *аффинной* тригонометрической форме следующим образом:

$$\begin{array}{c} V_{\text{col}}^{-1} \\ \left( \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right) \cdot \end{array} \begin{array}{c} P_2 \\ \left( \begin{array}{cc} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{array} \right) \end{array} \cdot \begin{array}{c} V_{\text{col}} \\ \left( \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right) = \end{array} \begin{array}{c} D\{P_2\} \\ \left( \begin{array}{cc} +\sqrt{b_1 \cdot b_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{b_1 \cdot b_2} \end{array} \right) \end{array}, \quad (369)$$

$$V_{\text{col}} = \{\text{Rot } \pi/4\}_{\text{af}} \cdot V_W, \quad (370)$$

$$\{\text{Rot } \pi/4\}_{\text{af}} = V^{-1} \cdot \text{Rot } \pi/4 \cdot V, \quad (371)$$

$$\text{где } \det \{\text{Rot } \pi/4\}_{\text{af}} = +1, \quad \mu_{1,2} = \cos \pi/4 \pm i \cdot \sin \pi/4.$$

То есть это та же ротационная сферическая матрица, но выраженная в некотором *аффинном* базисе. В частности, в вещественном декартовом базисе это  $\text{Rot } \pi/4$ , в комплексном бинарном декартовом базисе (271) это  $\text{Roth}(-i\pi/4)$ . Кроме того, с учётом (366)–(368) диагональные и контрадиагональные формы как структуры повторяются в базисах через согласованные прямые тензорные углы или кратные им. Они же как структуры устойчивы к согласованным с ними рефлексиям. Ввиду изложенного сформулируем основной результат.

*Пара несингулярных простых матриц  $P_1$  и  $P_2$  антикоммутативна тогда и только тогда, когда базисы их диагональных форм связаны в общем случае аффинной сферической ротацией на согласованный тензорный угол  $\pm \pi/4$ . Антикоммутативные несингулярные простые матрицы имеют обязательно чётный размер. Антикоммутативные сингулярные простые матрицы имеют необходимо согласованные биортогональные блоки, приводимые к диагональной форме в общем базисе. (В гиперболической трактовке – § 6.4 вышеуказанному сферическому углу отвечает его гиперболический аналог « $\pm \omega$ ».)*

Обратим внимание на следующее: если ротационная и внешняя модальная матрицы согласованы по  $2 \times 2$ -клеткам, то  $\{\text{Rot} \Phi\}_{\text{af}} = V^{-1} \cdot \text{Rot} \Phi \cdot V = = \cos \Phi + V^{-1} \cdot i \sin \Phi \cdot V$ . Например, именно так согласованы модальные матрицы, применяемые после преобразования  $V_W$ .

Ниже рассмотрены характерные частные случаи, имеющие отношение к тензорной тригонометрии. Имеем:

$$b_{1j} = \pm b_{2j} \leftrightarrow a_{1j} = \pm a_{2j}, \quad V_W = R_W;$$

$P_1 = M_1$ ,  $P_2 = M_2$  – антикоммутативные вещественные *нормальные* матрицы или комплексные *адекватно нормальные* матрицы (§ 4.2). Причём они либо симметричны, либо кососимметричны, что отвечает трём вариантам пар  $S_1$  и  $S_2$ ,  $S$  и  $K$ ,  $K_1$  и  $K_2$ , как указано ниже:

a)  $b_{2j} = +b_{1j} = b_j$ ,  $a_{2j} = +a_{1j} = -a_j$ ;  $a_j^2 + b_{1j}^2 = 1$ ,  $V_W = R_W$ ;

$P_1 = S_1$ ,  $P_2 = S_2$ ,  $S_1^2 + S_2^2 = I$ . Этот случай соответствует (183).

$$V_{\text{col}} = R_W \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \text{Rot } \pi/4 \cdot R_W.$$

б)  $b_{2j} = -b_{1j} = b_j/i$ ,  $a_{2j} = -a_{1j} = ia_j$ ;  $a_j^2 - b_{1j}^2 = 1$ ,  $V_W = R_W$ ;

$P_1 = S$ ,  $P_2 = K$ ,  $S^2 - K^2 = I$ . Этот случай соответствует (209).

$$V_{\text{col}} = R_W \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \\ -\sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \text{Roth } i\pi/4 \cdot R_W.$$

в)  $b_{2j} = -b_{1j} = b_j/i$ ,  $a_{2j} = -a_{1j} = ia_j$ ;  $P_1 = K_1$ ,  $P_2 = K_2$ ,  $-K_1^2 - K_2^2 = I$ .

Дополнительно рассмотрим отвечающие им примеры комплексных *эрмитово нормальных* пар антикоммутативных матриц  $N_1$  и  $N_2$ . Имеем:

$$b_1 = \rho_1 \cdot (\cos \beta_1 + i \sin \beta_1), \quad |\rho| > 0,$$

$$b_2 = \rho_2 \cdot (\cos \beta_2 + i \sin \beta_2), \quad |\beta| = 0 \div 2\pi,$$

$$b = \sqrt{b_1 \cdot b_2} = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \exp [i(\beta_1 + \beta_2)/2],$$

$$\sqrt{b_2/b_1} = \sqrt{\rho_2/\rho_1} \cdot \exp (i\beta_{12}), \quad \sqrt{b_1/b_2} = \sqrt{\rho_1/\rho_2} \cdot \exp (-i\beta_{12}); \quad \beta_{12} = \beta_2 - \beta_1.$$

По прежнему,  $b_{1j} = \pm b_{2j} \leftrightarrow a_{1j} = \pm a_{2j}$ ,  $V_W = R_W$ . В более сложных случаях имеем:

$$|b_{1j}| = |b_{2j}| = \rho_b, \quad |a_{1j}| = |a_{2j}| = \rho_a; \quad V_W = U_W;$$

$P_1 = N_1$ ,  $P_2 = N_2$  – антикоммутативные комплексные *эрмитово нормальные* матрицы. В частности, они могут быть эрмитовыми и косоэрмитовыми, что соответствует парам  $H_1$  и  $H_2$ ,  $H$  и  $Q$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$ .

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \cdot \exp(-i\beta_{12}) \\ \hline \sqrt{2}/2 \cdot \exp(i\beta_{12}) & \sqrt{2}/2 \\ \hline \end{array}} = \text{Exp}\{(-i\beta_{12}/2) \cdot \text{Rot } \pi/4 \cdot \text{Exp}(i\beta_{12}/2)\}, \quad (372)$$

где  $\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1$ ,  $\text{Exp } i\beta_{12}/2 = U_W \cdot \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline \exp(i\beta_{12}) & 0 \\ \hline 0 & \exp(-i\beta_{12}) \\ \hline \end{array}} \cdot U_W^*$ .

Ротационная матрица (372) есть частный случай (371). В том числе, при  $\beta = \pi/4$  имеем модальную матрицу Roth ( $-i\pi/4$ ), соответствующую комплексному бинарному декартову базису. Более общо:  $\text{Exp}(-i\pi/4) \cdot \text{Rot } \Phi \cdot \text{Exp } i\pi/4 = \text{Roth } (i\Phi)$ , что тождественно по результату рефлексивному преобразованию (271). В самом же общем случае формула (372) выражает  $\text{Rot } \pi/4$  в эрмитово ортогональном базисе с углом комплексного сдвига  $\beta_{12}$ . В вариантах (367), (368) имеем:

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline N_1 & \\ \hline +\rho_a \cdot \exp\left[i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right] & 0 \\ \hline 0 & -\rho_a \cdot \exp\left[i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right] \\ \hline \end{array}} - \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline N_2 & \\ \hline 0 & \rho_b \cdot \exp(i\beta_1) \\ \hline \rho_b \cdot \exp(i\beta_2) & 0 \\ \hline \end{array}},$$

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline N_1 & \\ \hline 0 & \rho_a \cdot \exp(i\alpha_1) \\ \hline \rho_a \cdot \exp(i\alpha_2) & 0 \\ \hline \end{array}} - \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline N_2 & \\ \hline +\rho_b \cdot \exp\left[i \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right] & 0 \\ \hline 0 & -\rho_b \cdot \exp\left[i \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right] \\ \hline \end{array}}.$$

a)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = 0$ ;

$P_1 = H_1$ ,  $P_2 = \bar{H}_2$  – антикоммутативная пара эрмитовых матриц. В случае  $\alpha_j^2 + \beta_{1j}^2 = 1$  это суть эрмитизированные проективные косинус и синус ( $(H_{12}^2 + H_{22}^2 = I)$ ).

б)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \pi$ ,  $\alpha_{1j} + \alpha_{2j} = 0$ ;

$P_1 = H$ ,  $P_2 = Q$  – антикоммутативная пара из эрмитовой и косоэрмитовой матриц. В случае  $\alpha_j^2 - \beta_{1j}^2 = 1$  это суть эрмитизированные проективные секанс и тангенс ( $(H^2 - Q^2 = I)$ ).

в)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = \pi$ ;  $P_1 = Q_1$ ,  $P_2 = Q_2$ ,  $-Q_1^2 - Q_2^2 = I$ .

Таким образом, мы выявили все основные типы антикоммутативных пар простых матриц, представляющие интерес в изучаемой тензорной тригонометрии.

## Глава 8. Тригонометрические спектры и неравенства

### § 8.1. Тригонометрический спектр нуль-простой матрицы

Матричные характеристические коэффициенты высшего порядка, как и проекторы, суть простые сингулярные матрицы с единственным ненулевым собственным значением (гл. 1 и 2). Представим высший матричный коэффициент второго рода для *нуль-простой* матрицы (§ 1.6) сначала в форме *алгебраической ортогональной суммы* по собственным тригонометрическим подпространствам, а затем в форме соответствующей ей *прямой ортогональной суммы* по собственным тригонометрическим клеткам, используя *принцип бинарности* (§ 5.6):

$$K_2(B,r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \overset{r-v'}{\overrightarrow{S_i}} \cdot K_2(B,r) \cdot \overset{r-v'}{\overrightarrow{S_i}} + \overset{r-v'}{\overrightarrow{S_m}} \cdot K_2(B,r) \cdot \overset{r-v'}{\overrightarrow{S_m}}, \quad (373)$$

где  $\overset{r-v'}{\overrightarrow{S_i}} = \overrightarrow{\{\cos^2 \tilde{\Phi}_B - \cos^2 \varphi_i I\}}$  проецирует ортогонально на  $i$ -ю собственную тригонометрическую плоскость  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$ ;

$\overset{r-v'}{\overrightarrow{S_m}} = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_B - I\}}$  проецирует ортогонально на подпространство  $\langle \mathcal{P}_m \rangle \equiv \langle \text{im } B \cap \text{im } B' \rangle$  размерности  $v'$  (см. рис.2). Причём здесь  $v'' = 0$  ввиду того, что  $B$  – нуль-простая матрица. Собственные ортопроекторы составляют полную сумму:

$$\sum_{i=1}^{r-v'} \overset{r-v'}{\overrightarrow{S_i}} + \overset{r-v'}{\overrightarrow{S_m}} + \overset{r-v'}{\overrightarrow{S_q}} = I,$$

где  $\overset{r-v'}{\overrightarrow{S_q}} = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_B + I\}}$  проецирует ортогонально на подпространство  $\langle \mathcal{P}_q \rangle \equiv \langle \ker B \cap \ker B' \rangle$  размерности  $n - 2r + v'$  (см. рис.2).

Общая размерность пространства, как и должно быть, составляет:  $2 \cdot (r - v') + v' + (n - 2r + v') = n$ . На подпространстве  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$  коэффициент  $K_2(B,r)$  формально проявляет себя как сингулярная матрица ранга 1; её размер в прямой сумме есть  $2 \times 2$ . На  $\langle \mathcal{P}_m \rangle$  он формально проявляет себя как несингулярная матрица; её размер в прямой сумме есть  $v' \times v'$ . На  $\langle \mathcal{P}_q \rangle$  он формально проявляет себя как нулевая матрица; её размер в прямой сумме есть  $(n - 2r + v') \times (n - 2r + v')$ . В прямой сумме имеем:

$$K_2(B, r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \bigoplus B_i^{2 \times 2} \bigoplus \det B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \bigoplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \quad (374)$$

где знак  $\bigoplus$  обозначает *ортогональное прямое суммирование*. Здесь как  $(r - v')$ , так и  $(n - 2r + v')$  – неотрицательные числа. Поэтому имеет место неравенство:

$$2r - n \leq v' \leq r. \quad (375)$$

В частности, для *нуль-нормальной* матрицы (§ 2.4) формула (374) приобретает простейший вид:

$$K_2(B, r) = \det B_m^{r \times r} \cdot I^{r \times r} \bigoplus Z^{(n-r) \times (n-r)}.$$

В формуле (374) применены специальные обозначения матриц:  $B_i^{2 \times 2}$  –  $2 \times 2$ -матрица ранга 1; для неё, согласно (29), высший матричный коэффициент совпадает с самой матрицей, а высший скалярный коэффициент совпадает с её следом;

$B_m^{v' \times v'}$  –  $v' \times v'$ -матрица ранга  $v'$ ; для неё, согласно (29), высший матричный коэффициент равен  $\det B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'}$ , а высший скалярный коэффициент совпадает с её детерминантом;

$Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}$  – часть нулевого блока, неотносящаяся к  $B_i^{2 \times 2}$ .

Общая сингулярность  $B$ , как и должно быть, составляет:

$$(r - v') + (n - 2r + v') = n - r.$$

Если в формуле (374) каждое слагаемое  $B_i^{2 \times 2}$  поделить на его след, а несингулярное слагаемое поделить на его детерминант, то тогда она преобразуется в *прямой* тригонометрический спектр косопроектора:

$$\overleftarrow{B} = \frac{K_2(B, r)}{k(B, r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \bigoplus \frac{B_i^{2 \times 2}}{\text{tr } B_i^{2 \times 2}} \bigoplus I^{v' \times v'} \bigoplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}. \quad (376)$$

При данном преобразовании применяется формула (62) для  $r = 2$  и  $r = n$ . Аналогичные тригонометрические спектры с использованием принципа бинарности выводятся для *мультиплекативных* матриц:

$$K_2(BB', r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \overrightarrow{S}_i \cdot K_2(BB', r) \cdot \overleftarrow{S}_i + \overrightarrow{S}_m \cdot K_2(BB', r) \cdot \overleftarrow{S}_m, \quad (377)$$

$$K_2(BB', r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \bigoplus B_i^{2 \times 2} \cdot B'_i^{2 \times 2} \bigoplus \det^2 B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \bigoplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \quad (378)$$

$$\overleftarrow{BB'} = \frac{K_2(BB', r)}{k(BB', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \bigoplus \frac{B_i^{2 \times 2} \cdot B'_i^{2 \times 2}}{\text{tr} \{ B_i^{2 \times 2} \cdot B'_i^{2 \times 2} \}} \bigoplus I^{v' \times v'} \bigoplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}. \quad (379)$$

Из (374), (376) и (378), (379) получаем прямые произведения для высших скалярных коэффициентов:

$$k(B, r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \operatorname{tr} B_i^{2 \times 2} \cdot \det B_m^{v' \times v'} = k(B', r), \quad (380)$$

$$k(BB', r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \operatorname{tr} \{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}\} \cdot \det^2 B_m^{v' \times v'} = k(B'B, r). \quad (381)$$

## § 8.2. Генеральное косинусное неравенство

В свою очередь, согласно (186), (194), имеем:

$$\overleftarrow{BB'} = \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B}' \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}_B = (\overleftarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi}_B) \cdot (\overleftarrow{B}' \cdot \cos \tilde{\Phi}_B)' . \quad (382)$$

Подставив в первую часть соотношения все матрицы в форме прямых спектров, получаем собственные косинусные неравенства для каждой его тригонометрической клетки:

$$0 \leq \cos^2 \varphi_i = \frac{\operatorname{tr}^2 B_i^{2 \times 2}}{\operatorname{tr} \{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}\}} \leq 1. \quad (383)$$

Из (380), (381) и (383) следует *генеральное косинусное неравенство* для квадратной матрицы в *модульной форме*, то есть для косинусного отношения (137), а именно:

$$0 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i = |\{B\}|_{\cos}^2 = |\det \cos \tilde{\Phi}_B| = \frac{k^2(B, r)}{k(BB', r)} \leq 1. \quad (384)$$

Здесь в крайних случаях:

$|\{B\}|_{\cos} = 0$  – для нуль-дефектной матрицы,

$|\{B\}|_{\cos} = 1$  – для нуль-нормальной матрицы.

Используя ранее введённые характеристики матрицы – *диагональ* и *минорант* (гл. 3), придадим косинусному неравенству вид:

$$0 \leq \frac{|\mathcal{D}(r) B|}{\mathcal{M}(r) B} = |\{B\}|_{\cos} = \frac{|\mathcal{D}(r) B|}{\sqrt{\mathcal{D}(r) BB'}} \leq 1.$$

Воспользовавшись второй частью соотношения (382), получаем аналогичные косинусные неравенства, но в *знаковой форме*:

$$-1 \leq \cos \beta_i = \frac{\operatorname{tr} B_i^{2 \times 2}}{\sqrt{\operatorname{tr} \{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}\}}} \leq +1. \quad (385)$$

В случае косинусного отношения (138) имеем:

$$-1 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos \beta_i = \{\mathbf{B}\}_{\cos} = \frac{k(B, r)}{\sqrt{k(BB', r)}} \leq +1, \quad (386)$$

или

$$-1 \leq \frac{\mathcal{D}(r) B}{\mathcal{D}(r) B} = \{\mathbf{B}\}_{\cos} = \frac{\mathcal{D}(r) B}{\sqrt{\mathcal{D}(r) BB'}} \leq +1.$$

Крайние варианты здесь соответствуют нуль-нормальным матрицам с отрицательной и положительной диагональю ( $\mathcal{D}(r) B = k(B, r) = \prod_{j=2}^q \mu_j^{s_j}$  – см. § 1.5). Например, это могут быть несингулярные матрицы с отрицательным и положительным детерминантами. Нетрудно также видеть, что в вышеуказанных формулах частный угол  $-\pi \leq \beta_i \leq +\pi$  отличается от собственного угла  $-\pi/2 \leq \varphi_i \leq +\pi/2$  также, как угол между двумя направленными векторами отличается от угла между двумя ненаправленными векторами или линиями. Соответственно  $\{\mathbf{B}\}_{\cos}$  есть косинусное отношение для планаров  $\langle \text{im } B \rangle, \langle \text{im } B' \rangle$  и для планаров  $\langle \ker B \rangle, \langle \ker B' \rangle$ ; а  $\{\mathbf{B}\}_{\cos}$  есть косинусное отношение для линеоров, заданных матрицами  $B$  и  $B'$ .

Заметим также, что для простой составляющей  $P_B$  от нуль-простой матрицы  $B$ , согласно (22) и (76), тригонометрия и спектры тождественны таковым для самой исходной матрицы:

$$\left. \begin{array}{l} P_B = B, \\ P_B \cdot P_B' = BB', \end{array} \right\} (B \in \langle Bp \rangle).$$

Кроме того, отметим, что для тензорного угла между планарами ранга 1, то есть прямыми, и ранга  $(n - 1)$ , то есть гиперплоскостями, возможна только одна тригонометрическая клетка, что отвечает одной собственной тригонометрической плоскости.

Из вышеизложенного следует основной вывод. *Тригонометрический смысл собственных углов  $\varphi_i$  для сферических функций тензорного угла заключается в том, что это суть скалярные углы между планарами первого ранга –  $\langle \text{im } B_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im } B'_i^{2 \times 2} \rangle$  в прямых тригонометрических спектрах для  $K_2(B, r)$  и  $K_2(B', r)$ .*

Аналогичный указанному тригонометрический смысл имеют собственные скалярные углы  $\varphi_i$  в клетках, когда бинарный тензорный угол задаётся эквиранговыми линеорами  $A_1$  и  $A_2$  или планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ . Пусть выполняется условие (224) при  $B = A_1 A_2'$  и соответственно имеет место взаимно-однозначное соответствие (226) между ортопроекторами. Тригонометрические спектры для внешних мультиPLICATIONS линеоров  $A$  имеют вид:

$$\begin{aligned} K_2(AA', r) &= \sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i \cdot K_2(AA', r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(AA', r) \cdot \vec{S}_m \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus [AA']_i^{2 \times 2} \oplus \det [AA']^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \end{aligned} \quad (387)$$

$$\begin{aligned} K_2(A_1 A_2', r) &= \sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i \cdot K_2(A_1 A_2', r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(A_1 A_2', r) \cdot \vec{S}_m \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} \oplus \det [A_1 A_2']^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}; \end{aligned} \quad (388)$$

$$\overleftarrow{AA'} = \frac{K_2(AA', r)}{k(AA', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{[AA']_i^{2 \times 2}}{\text{tr } [AA']_i^{2 \times 2}} \oplus I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \quad (389)$$

$$\overleftarrow{A_1 A_2'} = \frac{K_2(A_1 A_2', r)}{k(A_1 A_2', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{[A_1 A_2']_i^{2 \times 2}}{\text{tr } [A_1 A_2']_i^{2 \times 2}} \oplus I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}; \quad (390)$$

$$k(AA', r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr } [AA']_i^{2 \times 2} \cdot \det [AA']^{v' \times v'} = \det A'A, \quad (391)$$

$$k(A_1 A_2', r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr } [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} \cdot \det [A_1 A_2']^{v' \times v'} = \det A_1'A_2. \quad (392)$$

Причём, согласно (132),  $\det^2 [A_1 A_2']^{v' \times v'} = \det [A_1 A_1']^{v' \times v'} \cdot \det [A_2 A_2']^{v' \times v'}$ . В свою очередь, согласно (186), (196) и (226), имеем:

$$\overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} = \overleftarrow{A_1 A_2'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{A_1 A_2'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\overleftarrow{A_2 A_1'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}). \quad (393)$$

Отсюда же для 2x2-клеток ранга 1 устанавливаются вспомогательные соотношения:

$$[A_1 A_2']_i^{2 \times 2} \cdot [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} = \text{tr } [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} \cdot [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} = [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}. \quad (394)$$

Первое из них есть частный случай (68). Подставив в формулу (393) матрицы в виде прямых спектров и используя (394) по клеткам, получаем собственные косинусные неравенства и затем генеральное косинусное неравенство для пары эквиранговых линеоров  $A_1$  и  $A_2$ :

$$0 \leq \cos^2 \varphi_i = \text{tr}^2 [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} / \text{tr } [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr } [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \leq 1, \quad (395)$$

$$0 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i = |\{A_1 A_2'\}|_{\cos}^2 = |\det \cos \tilde{\Phi}_{12}| = \frac{\mathcal{M}^2(r) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}^2(r) A_1 \cdot \mathcal{M}^2(r) A_2} \leq 1, \quad (396)$$

где  $\varphi_i$  – собственные скалярные углы между планарами первого ранга  $\langle \text{im } [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im } [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \rangle$ . Здесь в крайних случаях:

$|\{A_1 A_2'\}|_{\cos} = 1$  – для параллельных линеоров,

$|\{A_1 A_2'\}|_{\cos} = 0$  – для ортогональных, в том числе частично, линеоров.

Соответствующие косинусные неравенства в знаковой форме:

$$-1 \leq \cos \beta_i = \operatorname{tr} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} / \sqrt{\operatorname{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}} \leq +1, \quad (397)$$

$$-1 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos \beta_i = \{A_1 A_2'\}_{\cos} = \frac{\mathcal{D}\ell(r) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}\ell(r) A_1 \cdot \mathcal{M}\ell(r) A_2} \leq +1. \quad (398)$$

Заметим, что в (384) и (396) знаменатели тождественны (где  $B = A_1 A_2'$ ). Это соответствует той же формуле (132). При  $r_1 \neq r_2$  косинусное отношение формально нулевое.

### § 8.3. Спектрально-клеточное представление тензорных тригонометрических функций

Теперь можно взглянуть более детально на структуру проективного косинуса и синуса на уровне тригонометрической  $2 \times 2$ -клетки. Как было показано ранее (гл. 5), собственные тригонометрические плоскости, относящиеся к  $2 \times 2$ -клеткам, для тензорных углов проективного и моторного типа тождественны. Поэтому на основании левой части (301) и спектра (389) имеем:

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{vmatrix} \cdot \frac{[A_1 A_1']_i^{2 \times 2}}{\operatorname{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2}} \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{vmatrix} = \frac{[A_2 A_2']_i^{2 \times 2}}{\operatorname{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}}.$$

В свою очередь,  $2 \times 2$ -клетку проектора  $\overleftarrow{[AA']}_i^{2 \times 2}$  ранга 1 можно представить как внешнюю мультипликацию единичного  $2 \times 1$ -вектора  $e_i$ , задающего  $i$ -ю базисную линию планара  $\langle im A \rangle$  на  $i$ -й собственной тригонометрической плоскости бинарного тензорного угла:

$$\overleftarrow{[AA']}_i^{2 \times 2} = \frac{[AA']_i^{2 \times 2}}{\operatorname{tr} [AA']_i^{2 \times 2}} = e_i \cdot e_i' = \overleftarrow{e_i \cdot e_i'}.$$

Соответственно две стороны тензорного угла, образуемого планарами  $\langle im A_1 \rangle$  и  $\langle im A_2 \rangle$  ранга  $r$ , на уровне  $2 \times 2$ -клетки можно представить в виде двух собственных единичных векторов или прямых, которые преобразуются друг в друга посредством ротационного или рефлексивного преобразования, согласно (301). Выразим декартовы координаты указанных единичных векторов для обоих планаров на  $i$ -й тригонометрической плоскости через прилежащие углы:

$$e_1 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{vmatrix}, \quad e_2 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда при ротационном преобразовании планаров имеем:

$$e_2 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} \end{vmatrix} \cdot e_1 \quad (\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1).$$

(Если представить 1-й вектор в форме суммы его двух ортопроекций, то видно, что каждая из проекций поворачивается на тот же угол, что и вектор.) Согласно (171), косинус для  $2 \times 2$ -клетки имеет вид:

$$[\cos \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{e}_1} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_1}' + \overleftarrow{\mathbf{e}_2} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_2}' - I^{2 \times 2} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2' - I^{2 \times 2}.$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$[\cos \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \cos \varphi_{12} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{vmatrix} \begin{cases} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 1, \quad (399) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2. \end{cases}$$

Согласно (163), синус для  $2 \times 2$ -клетки имеет вид:

$$[\sin \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{e}_2} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_2}' - \overleftarrow{\mathbf{e}_1} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_1}' = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2' - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1'.$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$[\sin \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \sin \varphi_{12} \cdot \begin{vmatrix} -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{vmatrix} \begin{cases} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1, \quad (400) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1. \end{cases}$$

Условие  $(\varphi_2 + \varphi_1) = 0$  или в тензорной форме  $(\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2) = Z$  отвечает базису диагонального косинуса, или тригонометрическому базису. При том же условии все проективные тригонометрические функции и углы, а также все рефлекторы имеют ранее установленные канонические формы (§ 5.5). Зеркало срединного рефлектора есть срединное подпространство тензорного угла, что наглядно видно на уровне рассмотренной  $2 \times 2$ -клетки. Аналогично представляются проективные секанс и тангенс.

## § 8.4. Генеральное синусное неравенство

Генеральное косинусное неравенство (396) для пары эквиранговых линеоров  $A_1$  и  $A_2$  служит далее определению *косинусных* тригонометрических норм. При  $r = 1$  оно есть геометрическое неравенство Коши в *модульной форме* для парной совокупности чисел. Последнее используется в аналитической геометрии с целью нормирования косинуса угла между двумя векторами в интервале  $[0 \div \pi/2]$ . В *знаковой форме* типа (141) неравенство Коши определяет косинусную меру угла между двумя направленными векторами в интервале  $[0 \div \pi]$ . Оно является частным случаем генерального косинусного неравенства (398). Изначально неравенство Коши имело чисто алгебраический характер.

Но тот же характер можно придать и вышеуказанным генеральным неравенствам (384), (386) и (396), (398), если их отнести непосредственно к скалярным элементам матриц. Генеральные косинусные неравенства суть прямые произведения собственных неравенств Коши, согласно тригонометрическим спектрам. В соответствии с (229), (230) для пары эквиранговых  $n \times r$ -линеоров имеет место *критерий внутренней мультипликации для констатации их хотя бы частичной ортогональности*:

$$\det C_{12} = \det (A_1' A_2) = 0 \leftrightarrow \{ A_1 A_2' \}_{\cos} = 0. \quad (401)$$

С другой стороны, для определения тригонометрических норм *синусного* характера может применяться синусное отношение (135). Оно невырождено для пары полно линейно независимых линеоров. В соответствии с (227), (228) для пары  $n \times r_1$ - и  $n \times r_2$ -линеоров имеет место *критерий внутренней мультипликации для констатации их хотя бы частичной параллельности, или частичной линейной зависимости* (аналог определителя Грама для набора векторов):

$$\det G_{1,2} = \det [(A_1 | A_2)' \cdot (A_1 | A_2)] = 0 \leftrightarrow |\{ A_1 | A_2 \}|_{\sin} = 0. \quad (402)$$

Конечно, тот же самый критерий можно применять к планарам  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  для констатации их хотя бы частичной параллельности. Синусное отношение (135) невырождено только для *полно линейно независимых линеоров*. Оно представляется аналогично косинусному в форме прямого произведения собственных синусных отношений (124), согласно соответствующему тригонометрическому спектру. Матрица-суперпозиция линеоров  $(A_1 | A_2)$ , когда последние полно линейно независимы, имеет ранг  $(r_1 + r_2)$ . Её внешняя гомомультиплексия есть симметричная положительно (полу)определенная  $n \times n$ -матрица  $B_{1,2} = [(A_1 | A_2) \cdot (A_1 | A_2)']$ . С учётом (120) и (402) имеем:

$$k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)] = \det G_{1,2} \geq 0. \quad (403)$$

Согласно (135), получаем:

$$|\{ A_1 | A_2 \}|_{\sin}^2 = \frac{k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)]}{k (A_1 A_1', r_1) \cdot k (A_2 A_2', r_2)}. \quad (404)$$

С другой стороны, согласно (62), (159) и (163), для пары полно линейно независимых линеоров имеем:

$$\overleftarrow{\sin \tilde{\Phi}_{12}} = \overleftarrow{B_{1,2}} = \frac{K_2 [B_{1,2}, (r_1 + r_2)]}{k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)]}. \quad (405)$$

Тригонометрический спектр высшего матричного коэффициента 2-го рода (в числителе дроби) выражается ниже как в алгебраической сумме, так и в прямой сумме с использованием принципа бинарности (где  $v' = 0$ ).

$$K_2[B_{1,2},(r_1+r_2)] = \sum_{i=1}^{r_1-v''} S_i \cdot K_2[B_{1,2},(r_1+r_2)] \cdot \overrightarrow{S}_i + \overrightarrow{S}_d \cdot K_2[B_{1,2},(r_1+r_2)] \cdot \overrightarrow{S}_d. \quad (406)$$

Здесь проектор  $\overrightarrow{S}_d = \overline{\cos \overrightarrow{\Phi}_{12}}$  проецирует ортогонально на дефектное подпространство пересечений:

$\langle \mathcal{P}_d \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1' \rangle \cup \langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle$  размерности  $(r_2 - r_1 + 2v'')$ .

$$K_2[B_{1,2},(r_1+r_2)] = \sum_{i=1}^{r_1-v''} \oplus \det[(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)'_i]^{2 \times 2} \cdot I_i^{2 \times 2} \oplus \quad (407)$$

$$\oplus \det[A_1 A_1']^{v'' \times v''} \cdot I^{v'' \times v''} \oplus \det[A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')} \cdot I^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')} \oplus$$

$$\oplus Z^{(n - r_1 - r_2) \times (n - r_1 - r_2)}.$$

Поясним некоторые выражения в формуле (407):

$[(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)'_i]^{2 \times 2}$  – 2×2-матрица ранга 2 (несингулярная), соответствующая i-ой тригонометрической клетке; для неё высший матричный коэффициент 2-го рода определяется, согласно (29), а высший скалярный коэффициент совпадает с детерминантом;

$[A_1 A_1']^{v'' \times v''}$  и  $[A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')}$  – несингулярные матрицы, соответствующие в спектре подпространствам  $\langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1' \rangle$ ; для них высшие коэффициенты определяются аналогично;

$Z^{(n - r_1 - r_2) \times (n - r_1 - r_2)}$  – нулевой блок.

Ортопроектор на образ гомомультиликации  $B_{1,2}$  в прямой сумме имеет вид:

$$\overleftarrow{B}_{1,2} = \sum_{i=1}^{r_1-v''} \oplus I_i^{2 \times 2} \oplus I^{(r_2 - r_1 + 2v'') \times (r_2 - r_1 + 2v'')} \oplus Z^{(n - r_1 - r_2) \times (n - r_1 - r_2)}. \quad (408)$$

Далее принято, что  $r_2 \geq r_1$ , как указано на рис. 2. Отметим, что для полно линейно независимых линеоров  $(r_1 + r_2) \leq n$  и  $v' = 0$ . Для i-й тригонометрической клетки, согласно (I24), имеем:

$$0 \leq \sin^2 \varphi_i = \det[(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)'_i]^{2 \times 2} / \text{tr}[A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr}[A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \leq 1, \quad (409)$$

где  $\varphi_i$  – угол между планарами первого ранга  $\langle \text{im } [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im } [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \rangle$ , как и в косинусном варианте (395).

Для установления генерального синусного неравенства остаётся, как и ранее, вычислить высший скалярный коэффициент. Он находится с учётом (407) и (409) в форме прямого произведения по тригонометрическим подпространствам:

$$\begin{aligned} k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)] &= \quad (410) \\ &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \det [(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)' ]_i^{2 \times 2} \cdot \det [A_1 A_1']^{v'' \times v''} \cdot \det [A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')} = \\ &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \{ \sin^2 \phi_i \cdot \text{tr}[A_1 A_1']^{2 \times 2} \cdot \text{tr}[A_2 A_2']^{2 \times 2} \} \cdot \det [A_1 A_1']^{v'' \times v''} \cdot \det [A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')} = \\ &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \sin^2 \phi_i \cdot k (A_1 A_1', r_1) \cdot k (A_2 A_2', r_2). \end{aligned}$$

(В этом произведении опускаются  $v''$  значений  $\sin^2 \phi_i = 1$  при  $i > r_1 - v''$ .)

И, наконец, из (404) и (410) выводим *генеральное синусное неравенство* для пары  $n \times r_1$ - и  $n \times r_2$ -линеоров, причём при  $n > 2$  исключительно в *модульной* форме:

$$\begin{aligned} 0 \leq \prod_{i=1}^{r_1-v''} \sin^2 \phi_i &= |\{A_1|A_2\}|_{\sin}^2 = \frac{\mathcal{M}t^2(r_1 + r_2) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}t^2(r) A_1 \cdot \mathcal{M}t^2(r) A_2} = \\ &= |\mathcal{D}t(r_1 + r_2) \sin \tilde{\Phi}_{12}| \leq 1. \quad (411) \end{aligned}$$

Здесь в крайних случаях:

$$\begin{aligned} |\{A_1|A_2\}|_{\sin} &= 0 - \text{для хотя бы частично параллельных линеоров,} \\ |\{A_1|A_2\}|_{\sin} &= 1 - \text{для полно ортогональных линеоров.} \end{aligned}$$

Для пары эквиранговых линеоров и соответственно для тензорного угла между ними генеральные неравенства (396) и (411) можно объединить в парное тригонометрическое неравенство:

$$0 \leq \sqrt{|\{A_1 \cdot A_2\}|_{\cos}^2} + \sqrt{|\{A_1 \cdot A_2\}|_{\sin}^2} \leq 1. \quad (412)$$

Оно получается путём применения алгебраического неравенства Коши для средних арифметического и геометрического к квадратам собственных значений косинуса и синуса и суммирования обоих неравенств. Косинусное отношение может быть ненулевым только при исходном условии  $r_1 = r_2 = r$ . Синусное отношение может быть ненулевым только при  $2r \leq n$ . При этом знак равенства справа в (412) имеет место тогда и только тогда, когда  $|\phi_i| = \text{const}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). При  $r = 1$  (то есть для угла между двумя векторами или прямыми) соотношение (412) трансформируется в обычное равенство:  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ .

Пусть дана прямоугольная  $n \times r$ -матрица ранга  $r$ . Представим её путём произвольной разбивки в форме совокупности блок-столбцов:

$$A \equiv \{A_1 | A_2 | \dots | A_j\}.$$

Такой форме матрицы  $A$  соответствует некоторый полигранный тензорный угол, задаваемый гранями – линеорами  $A_1, A_2, \dots, A_j$ . В частности, это есть полирёберный угол, если разбивка осуществляется до вектор-столбцов. Последовательно применив к указанной форме матрицы  $A$  генеральное синусное неравенство, получаем в итоге

$$\mathcal{M}(r) A \leq \mathcal{M}(r_1) A_1 \cdot \mathcal{M}(r_2) A_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{M}(r_j) A_j. \quad (413)$$

Причём знак равенства отвечает варианту взаимно-ортогональных линеоров (векторов). Соотношение (413) наиболее полно обобщает синусное неравенство Адамара. Кроме того, его частным случаем, применительно к теории решения линейного уравнения  $Ax = a$ , является тригонометрическая формула (122).

Все рассмотренные неравенства в исконной сферической трактовке имеют геометрический смысл применительно к евклидову или квазиеуклидову пространству. С другой стороны, в псевдоевклидовом пространстве, используя сферическо-гиперболическую синус-тангенсную аналогию (§ 6.2), получаем секансные и тангенсные генеральные неравенства гиперболического типа для матричных объектов, заданных сначала в универсальном базисе. В свою очередь, обращая секансное неравенство, получаем неравенство-перевёртыш гиперболического типа косинусной природы. Далее эти неравенства обобщаются на любые псевдодекартовы базисы с применением фундаментального рефлектор-тензора или срединного рефлектора угла.

## **Глава 9. Геометрические нормы матричных объектов**

### **§ 9.1. Квадратичные нормы матричных объектов евклидова (квазиевклидова) пространства**

Для любых принятых геометрических норм матриц или матричных объектов требуется, прежде всего, инвариантность по отношению к собственным геометрическим преобразованиям пространства. Например, последние в  $\langle Q^{n+q} \rangle$  задаются рефлектор-тензором. К ним относятся тригонометрически согласованные ротации и рефлексии, а также параллельный перенос. С другой стороны, в  $\langle E^n \rangle$  подобной согласованности для ротаций и рефлексий вообще не требуется, так как в нём рефлектор-тензор формально есть обычная единичная матрица. В таких арифметических пространствах для объектов ранга 1 вполне естественно применяется евклидова норма протяжённости. В бинарных тригонометрических отношениях объектов ранга 1 применяются евклидовы нормы косинуса и синуса, вытекающие из неравенств Коши и Адамара. Но для объектов большего ранга евклидова норма (или норма Фробениуса) имеет всего лишь *первый порядок*, выделяющий её на множестве геометрических норм. В связи с этим для объектов ранга  $g$  представляет особый интерес определить аналогичные нормы более высоких порядков – вплоть до величины ранга  $g$ . Выбор геометрических норм для  $g \times n$ -матрицы  $A$  или для отвечающего ей линеора возможен, в принципе, двумя способами.

По *первому способу* сначала вычисляют промежуточную норму для гомомультипликации  $A'A$  (в случае исходной симметричной матрицы – для квадрата  $S^2$ ). Она увязывается с её собственными значениями  $\sigma_i^2 > 0$ . Следовательно, чтобы далее произвести норму, относящуюся непосредственно к исходной матрице  $A$ , нужно из промежуточной дополнительно извлечь положительный квадратный корень. По *второму способу* норму можно было бы сразу увязать с собственными значениями  $\sigma_i > 0$  матричного арифметического корня  $\sqrt{A'A}$  (для неотрицательной симметричной матрицы такой корень тождествен исходной матрице  $S$ ). Однако в общем случае вычисление матричного арифметического корня – довольно сложный и трудоёмкий процесс.

С учётом этого обстоятельства в данной работе применяется именно первый способ. Получаемые по нему геометрические нормы именуются как *квадратичные* ввиду того, что они базируются на генеральной совокупности собственных значений  $\sigma_i^2$ .

Например, для знаконеопределённых симметричных матриц-функций  $\cos \Phi$ ,  $\sin \Phi$ ,  $\operatorname{tg} \Phi$  и  $\sec \Phi$  тригонометрические квадратичные нормы увязывают с собственными значениями их квадратов  $\cos^2 \varphi_i$ ,  $\sin^2 \varphi_i$ ,  $\operatorname{tg}^2 \varphi_i$  и  $\sec^2 \varphi_i$ . Они же при таком подходе одинаковы для тензорных тригонометрических функций проективного и моторного типа.

Предпосылками для корректного определения *общих квадратичных норм* являются ранее установленные геометрические аналогии типа (125), (127) – см. § 3.1, а также *генеральное неравенство средних величин* в части цепи (11) для средних алгебраических – см. § 1.2. Ранее анализ соотношений (125) и (127) показал, что коэффициенты Виета для гомомультиплексий матриц имеют вполне ясную геометрическую трактовку. Кроме того, получаемые из коэффициентов Виета малые медианы, согласно цепи (11) генерального неравенства средних величин, укладываются в некоторую иерархическую последовательность. (Медианы, как и ранее, отмечаются чертой сверху.) С учётом вышесказанного определим *квадратичные геометрические нормы*  $r \times n$ -матриц порядка  $t$  и степени  $h$  через внутренние гомомультиплексии как характеристики двух типов – простые и приведённые:

$$\|A\|_t^h = [\sqrt[2t]{k(A'A, t)}]^h > 0, \quad (414)$$

$$\overline{\|A\|_t^h} = [\sqrt[2t]{k(A'A, t)/C_r^t}]^h > 0. \quad (415)$$

В частности,

$$\|B\|_n^n = \sqrt{\det(B'B)} = |\det B| = \overline{\|B\|_n^n},$$

$$\|B\|_t^t = \sqrt{k(B'B, t)}, \quad \overline{\|B\|_t^t} = \sqrt{k(B'B, t)/C_r^t},$$

$$\|A\|_r^r = \sqrt{\det(A'A)} = \mathcal{M}_r(r) A = \overline{\|A\|_r^r}.$$

*Генеральная норма*, по определению, имеет порядок  $r$ , равный рангу матрицы. Она же при  $h = r$  есть *минорант* матрицы – см. § 3.1. *Генеральные квадратичные тригонометрические нормы* степени 1 для тензорного косинуса и синуса (проективных и моторных) определяются аналогичным образом:

$$0 \leq \|\cos \Phi_{12}\|_n^1 = \sqrt[2n]{\det \cos^2 \Phi_{12}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i} = \sqrt[n]{|\{A_1 \cdot A_2\}_{\cos}|^2} \leq 1, \quad (416)$$

$$0 \leq \|\sin \Phi_{12}\|_{r_1+r_2}^1 = \sqrt[2(r_1+r_2)]{2\ell(r_1+r_2) \sin^2 \Phi_{12}} = \sqrt[r_1+r_2]{\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \sin^2 \phi_i} = \\ = \sqrt[r_1+r_2]{\|\{A_1 \cdot A_2\}_{\sin}\|^2} \leq 1. \quad (417)$$

Эти нормы характеризуют скалярно бинарный тензорный угол между линеарами  $A_1$  и  $A_2$  или между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  при условии  $2r \leq n$  (для косинуса) и при условии  $r_1 + r_2 \leq n$  (для синуса). В случае  $2r > n$  генеральную косинусную норму относят к углу между планарами  $\langle \ker A_1' \rangle$  и  $\langle \ker A_2' \rangle$ . При  $r_1 + r_2 > n$  генеральная синусная норма вырождена. В свою очередь, скалярная характеристика

$$0 \leq \|\cos \Phi_B\|_n^1 = \sqrt[n]{\|\{B\}_{\cos}\|^2} \leq 1 \quad (418)$$

есть генеральная тригонометрическая норма степени 1 для косинуса бинарного тензорного угла между планарами  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$  при условии  $2r \leq n$ . В противном случае эту норму относят к углу между планарами  $\langle \ker B \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$ . Все вышеуказанные геометрические нормы формально при  $t > \text{rang}\{\dots\}$  суть нулевые, а при  $t = 0$  суть единичные.

Согласно рекуррентной формуле Варинга – Леверье прямого типа или системе уравнений Ньютона (§ 1.1), имеется только  $r$  независимых геометрических норм. Именно нормы (414) и (415) полностью охарактеризовывают геометрические свойства линейного матричного объекта ранга  $r$ , согласно *полному* набору его геометрических инвариантов. Квадратичная геометрическая норма порядка 1 и степени 1 есть норма Фробениуса:

$$\|A\|_F^1 = \sqrt{\text{tr}(A'A)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r \sigma_{jk}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \|A\|_F > 0. \quad (419)$$

(То же справедливо для евклидовой нормы векторов.)

С другой стороны, отметим, что если бы нормы определялись, согласно второму способу (см. выше), из собственных значений  $\sqrt{A'A}$ , то тогда нормы Фробениуса и Евклида являлись степенными нормами порядка  $\theta = 2$ :

$$\sqrt[\theta]{S_\theta(\sigma_i)} = \sqrt[\theta]{\sum_{i=1}^r \sigma_i^\theta} \quad (\theta = \overline{1, r}).$$

Соответствующий им полный набор алгебраических норм тогда бы имел вид:

$$\|\sqrt{A'A}\|_t^1 = \sqrt[t]{s_t(\sigma_i)} = \sqrt[t]{k(\sqrt{A'A}, t)} \quad (t = \overline{1, r}).$$

Тождественность обоих способов определения норм (при одних и тех же их параметрах) имеет место только для норм высшего порядка, то есть для генеральных норм:

$$\|A\|_r^1 = \sqrt[2r]{s_r(\sigma_i^2)} = \sqrt[2r]{\det(A'A)} = \sqrt[r]{M_t(r) A} = \sqrt[r]{s_r(\sigma_i)} = \sqrt[r]{\det \sqrt{A'A}}.$$

(В частности, это имеет место для евклидовой нормы при  $r = 1$ .) Однако в общем случае при  $t \leq r$  для вычисления норм по второму способу, как уже указывалось, потребовалось бы сначала найти матричный арифметический корень. По первому способу нормы вычисляют через скалярные характеристические коэффициенты той же внутренней гомомультипликации  $A'A$ . В этом суть различия обоих подходов и, как отмечалось ранее, – причина выбора именно первого способа определения геометрических норм.

Норма Фробениуса, или норма порядка 1 и степени 1 есть инвариант длины. Генеральная норма – минорант, или норма порядка  $r$  и степени  $r$  есть инвариант объёма ранга  $r$ . Характеристика  $\|A\|_r^1 = \|A\|_r^r$  есть инвариант степени 1 этого объёма, или генеральная иерархическая норма – малая медиана (§ 1.1). Геометрические нормы  $\|A\|_t^1$  – малые медианы находятся в иерархии, соответствующей цепи (11) генерального неравенства средних величин. Геометрическая сущность вышеуказанных общих норм трактуется исходя из соотношений (127) как характеристика  $t$ -мерных объёмов и, в частности, при  $t = 1$  как характеристика длины, а генеральной нормы – из соотношения (125) как характеристика  $r$ -мерного объёма. *Иерархические квадратичные тригонометрические* нормы порядка 1 определяются аналогичным образом:

$$\|\cos \Phi\|_1^{-1} = \sqrt{\frac{\operatorname{tr} \cos^2 \Phi}{n}}, \quad \|\sin \Phi\|_1^{-1} = \sqrt{\frac{\operatorname{tr} \sin^2 \Phi}{n}}.$$

С учётом (182), (261) и (208), (264) имеем:

$$\|\cos \Phi\|_1^2 + \|\sin \Phi\|_1^2 = 1 = \|\sec \Phi\|_1^2 - \|\operatorname{tg} \Phi\|_1^2. \quad (420)$$

Квадратичные тригонометрические нормы *высшего* порядка выражаются формулами (416), (417). Если цепь (11) генерального неравенства средних величин состоит из усреднённых инвариантов какой-либо тензорной тригонометрической функции, то тогда его же цепь (12) содержит обращённые усреднённые инварианты мультиплекативно обратной тригонометрической функции. Очевидно, что иерархические инварианты косинуса и синуса заключены в интервале  $[0 \div 1]$ , а секанса и тангенса в интервалах:  $[1 \div \infty]$  и  $[0 \div \infty]$ .

## § 9.2. Определение абсолютных и относительных геометрических норм

Рассмотрим определение и имманентные свойства разнообразных геометрических норм матричных объектов. Пусть  $A$  есть комплексная  $n \times m$ -матрица, представляющая алгебраически либо одновалентный тензор в пространстве  $\langle A^n \rangle$  при  $m \leq n$ , либо двухвалентный тензор в пространстве  $\langle A^{n \times n} \rangle$  при  $m = n$  как некие геометрические объекты. Дадим следующее определение.

*Вещественная скалярная функциональная характеристика  $\|A\|_t^h$  от элементов матрицы  $A$  ранга  $r$  есть определённая абсолютная геометрическая норма порядка  $t$  и степени  $h$ , если она удовлетворяет следующим условиям ( $0 \leq t \leq m$ ):*

$$(a) \|A\|_t^h = [\|A\|_t^1]^h > 0 \text{ при } 1 \leq t \leq r,$$

$$(a') \|A\|_0^h = 1 \text{ при } t = 0,$$

$$(a'') \|A\|_t^h = 0 \text{ при } t > r;$$

$$(b) \|c \cdot A\|_t^h = |c|^h \cdot \|A\|_t^h,$$

$$(c) \|A\|_t^h = \|U_1 \cdot A \cdot U_2\|_t^h,$$

$$(d) \|A\|_t^h = \|A^*\|_t^h.$$

Данному определению отвечают, например, нормы (414) – (419). Если же в условии (a) знак  $>$  заменить на знак  $\geq$ , то тогда аналогичная функциональная числовая характеристика есть полуопределенная абсолютная геометрическая норма порядка  $t$  и степени  $h$ . Последняя применяется исключительно для квадратных матриц  $B$ , представляющих алгебраически двухвалентный тензор. Полуопределённые нормы обозначаются как  $|\{B\}|_t^h$ . Приведём некоторые примеры:

$$|\{B\}|_t^t = |k(B,t)| \geq 0. \quad (421)$$

$$|\{B\}|_r^r = |k(B,r)| \geq 0, \quad |\{B\}|_n^n = |\det B|, \quad |\{B\}|_1^1 = |\operatorname{tr} B|.$$

В свою очередь, *относительная норма* того же порядка и степени образуется через отношение полуопределенной и определённой абсолютных геометрических норм. Она применяется также для квадратных матриц и имеет *тригонометрическую природу*, являясь при этом всегда безразмерной характеристикой. Например, это может быть косинусное и синусное отношения матриц, введённые ранее в гл. 3. Однако пока что порядок относительных норм отвечал только рангу матриц.

### § 9.3. Геометрический смысл общих квадратичных норм

Далее на примере косинусного отношения рассматриваются относительные нормы *общих* порядков и их связь с абсолютными нормами. Генеральные косинусные неравенства (396), (398) и соответствующие им косинусные отношения имеют обобщённые квазианалоги для порядков  $t < r$ . Пусть даны  $n \times r$ -линеоры  $A_1$  и  $A_2$ . Выделим в каждом из них взаимные субматрицы столбцов размера  $n \times t$  с одним и тем же набором номеров столбцов:  $\{A_1\}_j$  и  $\{A_2\}_j$ , где  $j = 1, C_r^t$ . Далее расположим вертикально и по порядку эти взаимные субматрицы отдельно для линеоров  $A_1$  и  $A_2$ . При этом исходные  $A_1$  и  $A_2$  преобразуются в пару *ранжированных* линеоров размера  $n \cdot C_r^t \times t$  и ранга  $t$ . Для каждой пары взаимных субматриц столбцов имеют место косинусные неравенства типа (396), (398):

$$-1 \leq \det \{A_1'A_2\}_j / \sqrt{\det (A_1'A_1)_j} \cdot \sqrt{\det (A_2'A_2)_j} \leq +1,$$

где в числителе представлен один из диагональных миноров матрицы  $\{A_1'A_2\}$  порядка  $t$ , соответствующий внутренней мультипликации взаимных субматриц столбцов  $\{A_1\}_j$  и  $\{A_2\}_j$ . Отсюда, суммируя числители и знаменатели всех частных неравенств, получаем общее неравенство:

$$-1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det \{A_1'A_2\}_j}{\sum_{j=1}^{C_r^t} \sqrt{\det (A_1'A_1)_j} \cdot \sqrt{\det (A_2'A_2)_j}} \leq +1.$$

Положительный знаменатель преобразуется далее без его уменьшения с использованием геометрического неравенства Коши для парной совокупности положительных чисел:

$$-1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det \{A_1'A_2\}_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det (A_1'A_1)_j} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det (A_2'A_2)_j}} \leq +1.$$

Используя (120) и (121), отсюда получаем *общее квазикосинусное неравенство* в знаковой форме:

$$-1 \leq \frac{k(A_1'A_2, t)}{\sqrt{k(A_1'A_1, t)} \cdot \sqrt{k(A_2'A_2, t)}} = \frac{k(A_1A_2', t)}{\sqrt{k(A_1A_1', t)} \cdot \sqrt{k(A_2A_2', t)}} \leq +1. \quad (422)$$

В свою очередь, квазикосинусное неравенство в незнаковой форме задаёт относительную норму:

$$0 \leq \frac{|\{A_1 \cdot A_2'\}|_t^t}{\|A_1\|_t^t \|A_2\|_t^t} \leq 1. \quad (423)$$

Тригонометрическая сущность квазикосинусного отношения как нормы порядка  $t < r$  устанавливается, согласно схеме его вывода, и относится непосредственно к ранжированным линеорам. Для 1-го порядка имеют место частные неравенства:

$$-1 \leq \frac{\text{tr}(A_1' A_2)}{\sqrt{\text{tr}(A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\text{tr}(A_2' A_2)}} = \frac{\text{tr}(A_1 A_2')}{\sqrt{\text{tr}(A_1 A_1')} \cdot \sqrt{\text{tr}(A_2 A_2')}} \leq +1, \quad (424)$$

$$0 \leq \frac{|\{A_1 \cdot A_2'\}|_1^1}{\|A_1\|_1^1 \cdot \|A_2\|_1^1} \leq 1. \quad (425)$$

Именно отсюда для нормы Фробениуса, применительно к паре исходных  $n \times r$ -линеоров, следуют классические неравенства параллелограмма и треугольника:

$$|\|A_1\|_1^1 - \|A_2\|_1^1| \leq \|A_1 \pm A_2\|_1^1 \leq \|A_1\|_1^1 + \|A_2\|_1^1, \quad (426)$$

$$\|A_1 + A_2\|_1^1 \leq \|A_1\|_1^1 + \|A_2\|_1^1. \quad (427)$$

Эти неравенства имеют линейный характер. Они демонстрируют природу нормы Фробениуса для линеоров как инварианта протяжённости. Но, строго говоря, косинусные характеристики (424), (425), неравенства (426), (427) и сами нормы Фробениуса относятся к линеорам  $A_1$  и  $A_2$  при  $r > 1$  только опосредовано – через пару ранжированных  $n \times r \times 1$ -векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ :

$$\|A_1\|_1^1 = \|\mathbf{a}_1\|_E, \quad \|A_2\|_1^1 = \|\mathbf{a}_2\|_E, \quad \|A_1 \pm A_2\|_1^1 = \|\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2\|_E;$$

$$\text{tr}(A_1' \cdot A_2) = \text{tr}(A_1 \cdot A_2') = \mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2, \quad |\{A_1 \cdot A_2'\}|_1^1 = |\mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2|.$$

В частности, теорема Пифагора для норм Фробениуса имеет место тогда и только тогда, когда ортогональны именно ранжированные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \|A_1 \pm A_2\|_1^2 &= \|A_1\|_1^2 + \|A_2\|_1^2, \\ \text{tr}(A_1' \cdot A_2) &= 0 = \mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2. \end{aligned} \right\} \quad (428)$$

Аналогичным образом, общие квазикосинусные отношения (422), (423) как относительные нормы применяются к линеорам  $A_1$  и  $A_2$  только опосредовано – через пару ранжированных линеоров (с точки зрения их тригонометрического смысла).

## § 9.4. Линеоры специальных видов и простейшие линеорные фигуры

Выявим в евклидовом линеорном пространстве специальные множества централизованных эквиранговых линеоров. Согласно (130), линеор представляется в форме квазиполярного разложения:

$$A = Rq \cdot |A|,$$

где  $|A| = \sqrt{A'A}$  – матричный евклидов модуль линеора. Здесь имеется аналогия с таким же представлением вектора:  $\mathbf{a} = \mathbf{e} \cdot |\mathbf{a}|$ , где  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}} = \|\mathbf{a}\|_E$ . Матричный модуль линеора играет ту же роль, что и скалярный модуль вектора, но для набора единичных векторов  $\{\mathbf{e}_i\} = Rq$ . Последние задают приведённые базисные ортогональные оси линеора.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{AA'} &= \overleftarrow{Rq \cdot Rq'} = Rq \cdot Rq', \quad Rq' \cdot Rq = I, \quad Rq' = Rq^+; \\ \overleftarrow{A_2 A_1'} &= \overleftarrow{Rq_2 Rq_1'} = Rq_2 \cdot \{Rq_1' Rq_2\}^{-1} \cdot Rq_1' = Rq_2 Rq_2' \cdot \sec^2 \Phi_{12} \cdot Rq_1' Rq_1' = \\ &= \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \sec^2 \Phi_{12} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'} - \text{см. также формулы (133), (186), (187).} \end{aligned}$$

Каждый линеор формально принадлежит собственному базисному планару:  $A \in \langle \text{im } A \rangle$ . Эквиранговые линеоры, имеющие один и тот же базисный планар  $\langle \text{im } A \rangle$ , образуют полное множество *колпланарных линеоров* (по отношению к планару  $\langle \text{im } A \rangle$ ). В частности, при  $r = 1$  это есть множество *коллинеарных векторов*. Колпланарность для пары эквиранговых линеоров определяется условием (153). Полное множество эквиранговых *колпланарных линеоров* задаётся параметрически через свободную  $r \times r$ -матрицу  $C$  ( $\det C \neq 0$ ) исходя из тождества:

$$\overleftrightarrow{(AC) \cdot (AC)} = \overleftrightarrow{AA'}. \quad (429)$$

В частности, на этом множестве всегда имеется *единичный* ортогональный линеор  $Rq \in \langle \text{im } A \rangle$ . (Заметим, что выполнение более “широкого” условия (154) соответствовало бы множеству *компланарных линеоров* относительно планара  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ .) Для колпланарных линеоров имеет место определяющее инвариантное соотношение:

$$Rq \cdot Rq' = \text{Const} = \overleftrightarrow{AA'}.$$

Выявим на множестве колпланарных линеоров подмножество эквиранговых *коаксиальных линеоров* исходя из более строгого определяющего соотношения  $Rq = \text{Const} = \{\mathbf{e}_i\}$ , то есть:

$$Rq_1 = Rq_2 = \dots = Rq \rightarrow \overleftarrow{A_1 A_1'} = \overleftarrow{A_2 A_2'} = \dots = \overleftarrow{AA'}.$$

Для пары коаксиальных линеоров имеют место простые модульные соотношения:

$$|A_1 \pm A_2|^2 = [|A_1| \pm |A_2|]^2,$$

$$A_1' \cdot A_2 = |A_1| \cdot |A_2| = (A_2' \cdot A_1)'.$$

Ротационная сферическая матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$ , получаемая из (245), согласно (301), транслирует линеор  $A_1$  во множество линеоров, коллинеарных на  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ :

$$(\text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1) \in \langle \text{im } A_2 \rangle,$$

где  $\Phi_{12}$  – моторный сферический угол между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга г. Следовательно, с учётом (429) любая пара эквиранговых линеоров связана соотношением типа

$$A_2 = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1 \cdot C, \quad (430)$$

где внутреннее линейное преобразование  $C$  вычисляется после внешней ротации  $\text{Rot } \Phi_{12}$ . Далее на этой основе определим *сферически ротационно конгруэнтные* между собой линеоры  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_2 = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1 \rightarrow |A_1| = |A_2|. \quad (431)$$

Для пары таких линеоров имеем модульные соотношения:

$$|A_1 \pm A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \frac{I \pm \cos \Phi_{12}}{2} \cdot A_1,$$

$$|A_1 + A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \sin^2 \frac{\Phi_{12}}{2} \cdot A_1,$$

$$|A_1 - A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \cos^2 \frac{\Phi_{12}}{2} \cdot A_1.$$

Эта пара образует 2г-мерный линеорный ромб сферического типа. В частности, центральные эквимодульные векторы всегда сферически конгруэнтны. Если  $\Phi_{12} = \pi/2$ , то пара таких линеоров образует линеорный квадрат:

$$|A_1 \pm A_2| = \sqrt{2} \cdot |A_1| = \sqrt{2} \cdot |A_2|.$$

В свою очередь, сферически ортогональный рефлектор  $\{\sqrt{I}\}_S$ , получаемый из (247), согласно (301), тоже транслирует линеор  $A_1$  во множество линеоров, коллинеарных на  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ :

$$(\{\sqrt{I}\}_S \cdot A_1) \in \langle \text{im } A_2 \rangle.$$

Следовательно, с учётом (429) любая пара эквиранговых линеоров связана соотношением типа

$$A_2 = \{\sqrt{I}\}_S \cdot A_1 \cdot C, \quad (432)$$

где внутреннее линейное преобразование  $C$  вычисляется после внешней рефлексии  $\{\sqrt{I}\}_S$ . Теперь на основе этого определим *сферически зеркально конгруэнтные между собой линеоры  $A_1$  и  $A_2$* :

$$A_2 = \{\sqrt{I}\}_S \cdot A_1 \rightarrow |A_1| = |A_2|. \quad (433)$$

Для пары таких линеоров имеет место модульное соотношение

$$|A_1 \pm A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \frac{I \pm \{\sqrt{I}\}_S}{2} \cdot A_1.$$

Здесь, в частности, можно использовать собственные *срединные ортопроекторы*, согласно формулам (253).

Таким образом, из эквиранговых линеоров, как и из векторов, формально возможно составлять разнообразные геометрические фигуры, обладающие теми или иными свойствами. Линеорное евклидово или квазиеуклидово пространство, как и векторное, имеет валентность 1.

Нетрудно также определить псевдоевклидовы (гиперболические) аналоги выше рассмотренных линеоров специального вида и простейших линеорных фигур, используя при этом гиперболические варианты тензорных тригонометрических функций и рефлекторов. В свою очередь, псевдоевклидовы модули – матричные и скалярные геометрических объектов определяются с применением во внутренних мультиPLICATIONах линеоров фундаментального рефлектор-тензора пространства.

## Глава 10. Варианты комплексификации тензорной тригонометрии

### § 10.1. Адекватный вариант

Комплексные сферические углы вообще, то есть в *проективном* и в *моторном* вариантах, выражаются через сферические и гиперболические вещественные углы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Phi + i\Gamma, \\ \psi_j &= \phi_j + i\gamma_j \end{aligned} \right\} \quad (434)$$

В *комплексном евклидовом пространстве* тензорная тригонометрия воплощается в результате адекватной комплексификации (§ 4.2). *Проективный* тензорный угол в транспонированной форме выражается как  $\tilde{\Psi}' = \tilde{\Phi} - i\tilde{\Gamma}$  (так как  $\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{\Gamma}' = -\tilde{\Gamma}$ ). *Моторный* тензорный угол в транспонированной форме выражается как  $\Psi' = -\Phi + i\Gamma$  (так как  $\Phi' = -\Phi$ ,  $\Gamma' = \Gamma$ ). Все геометрические понятия и формулы, кроме норм и неравенств, сохраняют свой прежний вид и значение. В частности, при вычислении миноранта и тензорного модуля используется простое транспонирование. Адекватный модуль для комплексных чисел  $\pm c$  одинаков и вычисляется через их квадрат с использованием формулы Муавра (то есть вполне универсальным способом):

$$\begin{aligned} \pm c &= \pm \rho \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad \text{где } 0 \leq \alpha < \pi; \\ (\pm c)^2 &= c^2 = \rho^2 \cdot (\cos 2\alpha + i \cdot \sin 2\alpha) = \rho^2 \cdot (\cos \beta + i \cdot \sin \beta), \quad \text{где } 0 \leq \beta < 2\pi; \\ |\pm c| &= |c| = \rho \cdot (\cos \beta/2 + i \cdot \sin \beta/2) = \rho \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha). \end{aligned} \quad (435)$$

В частности, отсюда видно, что сохраняется соотношение  $|c|^2 = c^2$ . Адекватный матричный евклидов модуль  $|A| = \sqrt{A'A}$  для матрицы A (§ 9.4) вычисляют через промежуточную диагонализацию её внутренней гомомультипликации посредством комплексного ортогонального модального преобразования:

$$R \cdot A'A \cdot R = D\{A'A\} = \{\sigma_j^2\}, \quad \text{где } \sigma_j^2 = \rho_j^2 \cdot (\cos \beta_j + i \cdot \sin \beta_j) = |\sigma_j|^2,$$

где  $0 \leq \beta_j < 2\pi$ .

Откуда через формулу Муавра имеем:

$$|\sigma_j| = \rho_j \cdot (\cos \beta_j / 2 + i \cdot \sin \beta_j / 2), \quad |A| = R \cdot \{|\sigma_j|\} \cdot R'.$$

В частности, сохраняется соотношение  $|A|^2 = A'A$ . В адекватном варианте все геометрические характеристики, в том числе углы и их функции, распадаются на вещественную и мнимую составляющие, хотя конечные (целевые) характеристики можно представлять в наиболее удобной форме. Адекватный вариант в простейшем случае применяется в комплексной евклидовой геометрии на плоскости, включая скалярную евклидову тригонометрию. Тождества Коши ( $n > 2$ ) и Лагранжа ( $n = 3$ ) сохраняют форму (142).

## § 10.2. Эрмитов вариант

В эрмитовом пространстве осуществляется эрмитова комплексификация вещественной евклидовой геометрии (§ 4.3). Проективный сферический тензорный угол – эрмитова матрица  $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Phi} + i\tilde{\Gamma} = \tilde{\Sigma}^*$ . Её собственные значения суть вещественные сферические скалярные углы  $\varepsilon_j$ . Напротив, моторный сферический тензорный угол – косоэрмитова матрица  $\Sigma = \Phi + i\Gamma = -\Sigma^*$ . Модуль и евклидова норма в эрмитовом варианте тождественны. Тригонометрические неравенства (гл. 8) и нормы матричных объектов (гл. 9) сохраняют свое значение в эрмитизированных вариантах. Заметим также, что *принцип бинарности* (§ 5.6) остаётся в силе как при адекватной, так и при эрмитовой комплексификации, поскольку все необходимые предпосылки для него в комплексной тензорной тригонометрии сохраняются. Эрмитовы аналоги клеточных формул (399), (400) получаются через соответствующие преобразования комплексных единичных векторов:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\cos \alpha \cdot \overline{\cos \alpha} + \sin \alpha \cdot \overline{\sin \alpha} = 1$ ;

$$\cos \alpha = \cos \varepsilon \cdot \exp(i\beta_c), \quad \sin \alpha = \sin \varepsilon \cdot \exp(i\beta_s),$$

$$\cos \alpha \cdot \overline{\cos \alpha} = \cos^2 \varepsilon, \quad \sin \alpha \cdot \overline{\sin \alpha} = \sin^2 \varepsilon.$$

$$[\cos \tilde{\Sigma}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{u}_1} \cdot \overleftarrow{\mathbf{u}_1}^* + \overleftarrow{\mathbf{u}_2} \cdot \overleftarrow{\mathbf{u}_2}^* - I^{2 \times 2} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - I^{2 \times 2} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \cdot \overline{\cos \alpha_1} + \cos \alpha_2 \cdot \overline{\cos \alpha_2} - 1 & \cos \alpha_1 \cdot \overline{\sin \alpha_1} + \cos \alpha_2 \cdot \overline{\sin \alpha_2} \\ \overline{\cos \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 + \overline{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 & \overline{\sin \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 + \overline{\sin \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +|c_1| & \bar{s}_1 \\ s_1 & -|c_1| \end{vmatrix};$$

$$-\det [\cos \tilde{\mathbf{E}}_{12}]^{2 \times 2} = |\mathbf{c}_1|^2 + \mathbf{s}_1 \cdot \overline{\mathbf{s}_1} = \cos^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \Delta = \cos^2 \varepsilon_{12},$$

$$\Delta = 1/2 \sin 2\varepsilon_1 \cdot \sin 2\varepsilon_2 \cdot (1 - \cos \beta_{\mathbf{c}_1} \cdot \cos \beta_{\mathbf{c}_2} \cdot \cos \beta_{\mathbf{s}_1} \cdot \cos \beta_{\mathbf{s}_2}).$$

$$[\sin \tilde{\mathbf{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{u}_2} \cdot \overleftarrow{\mathbf{u}_2}^* - \overleftarrow{\mathbf{u}_1} \cdot \overleftarrow{\mathbf{u}_1}^* = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 \cdot \overline{\cos \alpha_2} - \cos \alpha_1 \cdot \overline{\cos \alpha_1} & \cos \alpha_2 \cdot \overline{\sin \alpha_2} - \cos \alpha_1 \cdot \overline{\sin \alpha_1} \\ \overline{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - \overline{\cos \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 & \overline{\sin \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - \overline{\sin \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -|\mathbf{s}_2| & \overline{\mathbf{c}_2} \\ \mathbf{c}_2 & +|\mathbf{s}_2| \end{vmatrix},$$

$$-\det [\sin \tilde{\mathbf{E}}_{12}]^{2 \times 2} = |\mathbf{s}_2|^2 + \mathbf{c}_2 \cdot \overline{\mathbf{c}_2} = \sin^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \Delta = \sin^2 \varepsilon_{12},$$

$$(\Delta = 0 \leftrightarrow \cos \beta_{\mathbf{c}_1} \cdot \cos \beta_{\mathbf{c}_2} \cdot \cos \beta_{\mathbf{s}_1} \cdot \cos \beta_{\mathbf{s}_2} = +1, \quad \Delta \neq 0 \leftrightarrow \varepsilon_{12} \neq \varepsilon_2 - \varepsilon_1). \quad (436)$$

В тригонометрическом базисе имеем клеточные формы:

$$[\cos \tilde{\mathbf{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \cos \varepsilon_{12} \cdot \begin{vmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad [\sin \tilde{\mathbf{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \sin \varepsilon_{12} \cdot \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (437), (438)$$

В эрмитовом варианте все канонические W-формы в тригонометрическом базисе вещественны и сохраняют свой прежний вид. Преобразование к каноническим W-формам осуществляется унитарная модальная матрица  $U_W$ . На эрмитовой плоскости в базисе диагонального косинуса допускается эрмитово угловое смещение между парными функциями (косинус-синус, секанс-тангенс) с фазовым углом  $\beta$ :

$$\begin{array}{cccc} \text{Exp}(-i\beta/2) & \text{Ref } \{B^* \cdot B\}_r & \text{Exp}(+i\beta/2) & \text{Ref } \{B^* \cdot B\}_c \\ \begin{vmatrix} \exp(-\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{i\beta}{2}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +\cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & -\cos \varepsilon \end{vmatrix} & \cdot \begin{vmatrix} \exp(\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\beta}{2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\cos \varepsilon & \sin \varepsilon \cdot \exp(-i\beta) \\ \sin \varepsilon \cdot \exp(i\beta) & -\cos \varepsilon \end{vmatrix} & (439) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{Exp}(-i\beta/2) & \text{Rot } \{\mathcal{E}\}_r & \text{Exp}(+i\beta/2) & \text{Rot } \{\mathcal{E}\}_c \\ \begin{vmatrix} \exp(-\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{i\beta}{2}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ +\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} & \cdot \begin{vmatrix} \exp(\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\beta}{2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \cdot \exp(-i\beta) \\ +\sin \varepsilon \cdot \exp(i\beta) & \cos \varepsilon \end{vmatrix} & (440) \end{array}$$

Поэтому эрмитов тригонометрический базис, помимо диагональности косинуса (как прежде), должен обеспечивать ещё и вещественность W-формы. Эрмитово угловое смещение с фазовым углом  $\beta_j$  на каждой собственной эрмитовой плоскости устраняется специальным эрмитово ортогональным (унитарным) модальным преобразованием  $\text{Exp } i\beta/2$  с приведением тригонометрических функций к вещественным каноническим формам.

Эрмитовы аналоги тождеств Коши ( $n > 2$ ) и Лагранжа ( $n = 3$ ) в соотношении (142) реализуются для координат пары векторов на эрмитовой плоскости при замене простого транспонирования на эрмитово. Заметим также, что эрмитов угол в общем случае есть весьма сложная функция от координат векторов или линеоров. Лишь в тригонометрическом базисе он приобретает вещественную каноническую форму тензорного сферического угла.

### § 10.3. Псевдоизация в бинарных комплексных пространствах

Далее особое значение имеет псевдоизация (гл. 4). Пусть изначально задано *бинарное комплексное аффинное пространство с индексом q*. Оно обозначается как  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle$ . В конкретном базисе аффинное пространство может рассматриваться как линейное. В частности,  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle$  в некотором псевдоединичном базисе  $\tilde{E}_0$  представляется прямой суммой, состоящей из  $n$ -мерного вещественного и  $q$ -мерного мнимого линейных подпространств:

$$\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle \oplus \langle i\mathcal{A}^q \rangle \equiv \text{CONST.} \quad (441)$$

Здесь постоянны, во-первых, суммарное пространство и, во-вторых, размерности слагаемых подпространств. В  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle$  допускаются такие линейные преобразования  $V$ , которые сохраняют бинарную структуру:

$$\begin{matrix} V & \tilde{E}_0 & \tilde{E} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline V_{11} & i \cdot V_{12} \\ \hline i \cdot V_{21} & V_{22} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline I^{n \times n} & Z^{n \times q} \\ \hline Z^{q \times n} & \pm i \cdot I^{q \times q} \\ \hline \end{array} & = \begin{array}{|c|c|} \hline V_{11} & \pm V_{12} \\ \hline i \cdot V_{21} & \pm i \cdot V_{22} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (442)$$

Первые  $n$  столбцов матрицы базиса задают  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ , остальные  $q$  столбцов задают  $\langle i\mathcal{A}^q \rangle$ . Соответственно модальная матрица  $V^{-1}$  (с такой же матричной структурой) приводит какой-либо бинарный базис  $\tilde{E}$  к простейшей диагональной (псевдоединичной) форме. Кроме того, она осуществляет пассивное модальное преобразование координат линейного элемента:  $\mathbf{z}\{\tilde{E}\} = V^{-1} \cdot \mathbf{z}\{\tilde{E}_0\}$ .

*Бинарный комплексный базис* в тригонометрических формах представляется псевдоединичными матрицами двух типов:

$$\tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \sqrt{I^\oplus}, \quad \tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \sqrt{I^\oplus}^{-1}. \quad (443), (444)$$

В любом бинарном комплексном базисе  $\tilde{E}$  линейный элемент пространства представляется прямой суммой, состоящей из вещественной и мнимой аффинных проекций:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus i\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ i\mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (445)$$

Ввиду аффинности пространства в целом подпространства-слагаемые и базисы могут подвергаться операции параллельного переноса на элемент (445). Применение базиса (443) целесообразно для представления канонических форм в *псевдогиперболическом* варианте тригонометрических функций (§ 5.9) с собственными углами  $i\varphi_j$ . Он тождествен (271). Применение базиса (444) целесообразно для представления канонических форм в *псевдосферическом* варианте тригонометрических функций (§ 6.1) с собственными углами  $i\gamma_j$ . Он тождествен базису, обратному (271). Вместе с тем, оба базиса эрмитово сопряжены по отношению друг к другу. Имеем соответствующие модальные преобразования:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{I^{\oplus}}^{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{I^{\oplus}} \\ 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(-i\varphi_j) & \operatorname{sh}(-i\varphi_j) \\ \operatorname{sh}(-i\varphi_j) & \operatorname{ch}(-i\varphi_j) \end{bmatrix},$$

что отвечает преобразованию (322);

$$\begin{bmatrix} \sqrt{I^{\oplus}} \\ 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma_j & \operatorname{sh} \gamma_j \\ \operatorname{sh} \gamma_j & \operatorname{ch} \gamma_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{I^{\oplus}} \\ 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos i\gamma_j & -\sin i\gamma_j \\ \sin i\gamma_j & \cos i\gamma_j \end{bmatrix},$$

что отвечает преобразованию (323). Кроме того, базис (444) целесообразен как исходный для изложения псевдоевклидовой геометрии в форме *комплексного* квазиевклидова изоморфизма. А именно введём для комплексных линейных элементов бинарного аффинного пространства  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle$ , выраженных в базисе (444), скалярное произведение с единичным метрическим тензором:

$$\mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_1' \cdot \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_1' \cdot \mathbf{y}_2.$$

При этом пространство трансформируется в *комплексное квазиевклидово пространство с индексом q*. Оно представляется прямой сферически ортогональной суммой, состоящей из вещественного и мнимого евклидовых подпространств:

$$\langle \mathcal{E}^{n+q} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle \oplus \langle i\mathcal{E}^q \rangle \equiv \text{CONST}. \quad (446)$$

Здесь знак  $\oplus$ , как и ранее (§ 8.1), обозначает сферически ортогональное суммирование. По существу это есть комплексное бинарное *квазиевклидово* пространство, задаваемое рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$ .

## Глава 11. Тригонометрия общих псевдоевклидовых пространств

### § 11.1. Овеществление бинарного евклидова пространства

Далее применим к бинарному комплексному квазиеуклидову пространству, в том числе к исходному комплексному базису в нём, овеществляющее модальное преобразование:

$$\tilde{E}_1 = \sqrt{I^\oplus} \cdot \tilde{E}_0 = \{I\}. \quad (447)$$

Последнее выходит за пределы множества допустимых ортогональных модальных преобразований данного квазиеуклидова пространства, так как  $\sqrt{I^\oplus}' \cdot \sqrt{I^\oplus} \neq I$ . Ввиду этого пространство становится иным. Теперь оно есть вещественное *псевдоевклидово* пространство с рефлектор-тензором  $I$ , вместе с тем, – метрическим тензором  $I^\oplus$  и с индексом  $q$ :

$$z' \cdot z = \text{const} = (\sqrt{I^\oplus} \cdot u)' \cdot (\sqrt{I^\oplus} \cdot u) = u' \cdot I^\oplus \cdot u. \quad (448)$$

Здесь тот же самый линейный элемент  $z$  выражен в базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  и обозначается как « $u$ ». В скобках осуществляется пассивное преобразование координат. Базис  $\tilde{E}_0$  в (447) выражен в единичном базисе  $\tilde{E}_1$ . Но, если другой исходный координатный базис  $\tilde{E}$  связан с вышеуказанным универсальным (декартовым) базисом  $\tilde{E}_1$  (§ 6.3) каким-либо вещественным линейным преобразованием  $V$ , то в нём базисы  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_0$  выражаются в виде:

$$\tilde{E}_1 = \{V\}^{-1}_{\tilde{E}} \cdot \tilde{E}, \quad (449)$$

$$\tilde{E}_0 = \{\sqrt{I^\oplus}^{-1}\}_{\tilde{E}_1} \cdot \tilde{E}_1 = \{V^{-1} \cdot \sqrt{I^\oplus}^{-1} \cdot V\}_{\tilde{E}} \cdot \{V^{-1}\}_{\tilde{E}} \cdot \tilde{E} = \{V^{-1} \cdot \sqrt{I^\oplus}^{-1}\}_{\tilde{E}} \cdot \tilde{E}. \quad (450)$$

Здесь матрица преобразования  $\sqrt{I^\oplus}^{-1}$  переводится из координат базиса  $\tilde{E}_1$  в координаты базиса  $\tilde{E}$ , как это осуществляется при последовательных модальных преобразованиях [27, с. 428–429]. Скалярное произведение в новом единичном базисе по-прежнему то же, поскольку оно определяет исконную метрическую величину элемента:

$$z' \cdot z = \text{const} = (\sqrt{I^\oplus} \cdot V \cdot a)' \cdot (\sqrt{I^\oplus} \cdot V \cdot a) = a' \cdot \{V' \cdot I^\oplus \cdot V\} \cdot a. \quad (451)$$

Здесь тот же самый линейный элемент  $\mathbf{z}$  выражен в базисе  $\tilde{\mathbf{E}}$  и обозначается как « $\mathbf{a}$ ». В скобках осуществляется пассивное преобразование координат. Ввиду несогласованности преобразования  $V$  с метрическим рефлектор-тензором  $I^\oplus$  последний претерпевает общее конгруэнтное преобразование

$$G^\oplus = V' \cdot I^\oplus \cdot V. \quad (452)$$

Например, такой метрический тензор формально действует в гауссовых криволинейных координатах псевдоевклидова пространства (сискажённой метрикой) как функция от его точечного элемента. Взаимный метрический тензор выражается в виде:

$$\hat{G}^\oplus = V^{-1} \cdot I^\oplus \cdot V^{-1}' = \{G^\oplus\}^{-1}. \quad (453)$$

В свою очередь, геометрия с постоянным метрическим тензором (452) изоморфна псевдоевклидовой геометрии с теми же параметрами размерностей  $n$  и  $q$ . Она по сути есть линейное отображение последней во множестве допустимых аффинных базисов:

$$\langle \tilde{\mathbf{E}}_{af} \rangle \equiv \langle T_{af} \rangle \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (454)$$

где формально действует метрический тензор  $G^\oplus$ .

$$T'_{af} \cdot V' \cdot I^\oplus \cdot V \cdot T_{af} = T'_{af} \cdot G^\oplus \cdot T_{af} = G^\oplus. \quad (455)$$

Из (455) следует, что  $\det T_{af} = \pm 1$ . Чтобы  $T_{af}$  входило в группу непрерывных преобразований, примем  $\det T_{af} = +1$ . Исходя из этого зададим группу аффинных тригонометрических преобразований  $\langle T_{af} \rangle$ , соответствующую тензору  $G^\oplus$ , в виде условий:

$$\left. \begin{array}{l} T'_{af} \cdot G^\oplus \cdot T_{af} = G^\oplus = \text{Const}, \\ \det T_{af} = +1. \end{array} \right\} \quad (456)$$

## § 11.2. Группа псевдоевклидовых ротаций

Положим в (452)  $V = R$ . Тогда имеем метрический тензор пространства как симметричный рефлектор-тензор (см. § 6.3):

$$G^\oplus = R' \cdot I^\oplus \cdot R = \{\sqrt{I}\}_S. \quad (457)$$

Напомним, что  $\{\sqrt{I}\}_S$  обозначает некоторый симметричный квадратный корень из  $I$ . Метрический тензор (457) действует в ориентированном псевдоевклидовом пространстве. Группа ротационных тригонометрических преобразований  $\langle T \rangle$  в нём задаётся с учётом (456) в виде условий:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Const}, \\ \det T = +1. \end{aligned} \right\} \quad (458)$$

В частности, метрический тензор (457) формально действует в ориентированном псевдоевклидовом пространстве, задаваемом срединным рефлектором тензорного угла  $\tilde{\Gamma}$ , если  $R = R_w$ ,  $\tilde{E} = R_w \cdot \tilde{E}_1 = \{R_w\}_{\tilde{E}_1}$ . В этом пространстве осуществляется гиперболическая интерпретация собственных косоугольных проекторов из § 2.1. Отметим также, что допустимые тригонометрические преобразования в псевдоевклидовом пространстве определяются равнозначно как внутренней, так и внешней мультиPLICATIONей:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T = \{\sqrt{I}\}_S, \\ T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S = I, \\ T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' = T', \\ \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' = I, \\ T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' = \{\sqrt{I}\}_S. \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

(Соответствующий аналог в евклидовом пространстве:  $R' \cdot R = R \cdot R' = I$ .)

Положив в (452)  $V = I$ , возвращаемся в *неориентированное* псевдоевклидово пространство с метрическим рефлектор-тензором  $I^\oplus$ . Группа ротационных тригонометрических преобразований  $\langle T \rangle$  в нём задаётся с учётом (458), (459) в виде условий:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot I^\oplus \cdot T = I^\oplus = T \cdot I^\oplus \cdot T' = \text{Const}, \\ \det T = +1. \end{aligned} \right\} \quad (460)$$

Она известна как группа *однородных непрерывных преобразований Лоренца*. Установим изоморфную связь между группами аффинных  $\langle T_{af} \rangle$  и ротационных  $\langle T \rangle$  тригонометрических преобразований:

$$\begin{aligned} (V^{-1} \cdot T \cdot V)' \cdot \{V' \cdot I^\oplus \cdot V\} \cdot (V^{-1} \cdot T \cdot V) = \{V' \cdot I^\oplus \cdot V\}, \\ T_{af} = V^{-1} \cdot T \cdot V. \end{aligned} \quad (461)$$

Эта формула показывает, что обе группы подобны. Группа  $\langle T \rangle$  является трансляцией группы  $\langle T_{af} \rangle$  из аффинных базисов  $\{T_{af}\}$  в псевдодекартовы базисы  $\{T\}$ . Заметим, что евклидовым аналогом  $\langle T_{af} \rangle$  является группа:

$$\langle T_{af} \rangle \equiv V^{-1} \cdot \langle \text{Rot } \Phi \rangle \cdot V \text{ в евклидовой версии тригонометрии - см. § 5.12.}$$

(Тригонометрические функции в ней выражаются в аффинной форме.)

Псевдоевклидово пространство в каком-либо псевдодекартовом базисе представляется гиперболически ортогональной суммой, состоящей из двух вещественных евклидовых подпространств:

$$\langle P^{n+q} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle \oslash \langle \mathcal{E}^q \rangle \equiv \text{CONST}. \quad (462)$$

Здесь и далее знак  $\oslash$  обозначает гиперболически ортогональное суммирование по отношению к метрическому рефлектор-тензору. Например,  $\langle \text{im } B_p \oslash \ker B_p \rangle \equiv \langle P^{r+(n-r)} \rangle$  по отношению к тензору  $\text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi}_{B_p} \}^\oplus = \text{Ref} \{ \text{ch } \tilde{\Gamma}_{B_p} \}^\oplus$ . Согласно (462), псевдоевклидово пространство имеет бинарную структуру, задаваемую  $I^\oplus$  и конкретным псевдодекартовым базисом. Одновалентный тензор в этом пространстве расщепляется на две гиперболически ортогональные проекции – на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и на  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ . Двухвалентные тензоры расщепляются на пару однородных проекций  $n \times n$  (бипроекция на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ ) и  $q \times q$  (бипроекция на  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ ) и пару смешанных проекций  $n \times q$  и  $q \times n$ . В частности, при  $q = 1$  это суть  $n \times n$ -тензор, скаляр и пара векторов. Для одновалентных тензоров определяются внутренняя и внешняя мультипликации:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1' \cdot I^\oplus \cdot \mathbf{a}_2 &= c_{12}, \\ A_1' \cdot I^\oplus \cdot A_2 &= C_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (463)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{I^\oplus} \cdot T \cdot \{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'\} \cdot T' \cdot \sqrt{I^\oplus} &= B_{12}, \\ \sqrt{I^\oplus} \cdot T \cdot \{A_1 A_2'\} \cdot T' \cdot \sqrt{I^\oplus} &= B_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (464)$$

Как видно, указанные мультипликации транслируются именно в исходное бинарное комплексное евклидово пространство (446). Вследствие этого они применимы в формулах евклидовой геометрии, включая тензорную тригонометрию. В частности, применяя к этим мультипликациям соотношения (120), (121), получаем псевдоаналоги данных формул:

$$\left. \begin{aligned} c_{12} &= \text{tr } B_{12}, \quad \mathbf{a}' \cdot I^\oplus \cdot \mathbf{a} = \text{tr} \{ \sqrt{I^\oplus} \cdot T \cdot \{\mathbf{a} \mathbf{a}'\} \cdot T' \cdot \sqrt{I^\oplus} \}, \\ k(C_{12}, t) &= k(B_{12}, t), \quad k[(A' \cdot I^\oplus \cdot A), t] = k\{(\sqrt{I^\oplus} \cdot T \cdot A A' \cdot T' \cdot \sqrt{I^\oplus}), t\}. \end{aligned} \right\} \quad (465)$$

Для векторных и линеарных объектов в псевдоевклидовом пространстве эти скалярные характеристики являются по сути соответствующими псевдонормами.

При  $t = r$  определяются псевдоминорант и дианаль:

$$\mathcal{M}^2(r) A = k\{(\sqrt{I^\oplus} \cdot T \cdot A A' \cdot T' \cdot \sqrt{I^\oplus}), r\} = \det(A' \cdot I^\oplus \cdot A), \quad (466)$$

$$\mathcal{D}(r) B_{12} = k(B_{12}, r) = \det C_{12}.$$

Одновалентные тензорные объекты *псевдоортогональны*, если  $C_{12} = Z$  ( $c_{12} = 0$ ) – по аналогии с (155) – и хотя бы частично псевдоортогональны, если  $\det C_{12} = 0$ , – по аналогии с (229). Сферическая ортогональность может иметь место между объектами, находящимися оба в  $\langle E^n \rangle$  или оба в  $\langle E^q \rangle$ . Гиперболическая ортогональность может иметь место между объектами, находящимися порознь в  $\langle E^n \rangle$  и в  $\langle E^q \rangle$ . Множество универсальных базисов (352) тождественно множеству согласованных с тензором  $I^\oplus$  ортосферических ротационных матриц:

$$\left. \begin{aligned} \langle \tilde{E}_{1u} \rangle &\equiv \langle \text{Rot } \Theta \cdot \{I\} \rangle \equiv \langle \{\text{Rot } \Theta\}, I \rangle \\ \text{Rot}' \Theta \cdot I^\oplus \cdot \text{Rot } \Theta &= I^\oplus = \text{Rot } \Theta \cdot I^\oplus \cdot \text{Rot}' \Theta \end{aligned} \right\} \quad (467)$$

Согласованные с метрическим тензором общие ротационные матрицы и рефлекторы не изменяют ни внутренние мультиPLICATIONS (463), ни собственные углы между линейными объектами (векторами, линеорами, планарами). Заметим, что рефлекторы в  $\langle P^{n+q} \rangle$  могут быть сферически, гиперболически и псевдоевклидово ортогональными.

Линейное (централизованное) псевдоевклидово пространство по отношению к метрике распадается на 3 характеристических подпространства. Первое из них – разделительная плоская (коническая) гиперповерхность, или вещественный изотропный конус второго порядка:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{t=1}^q y_t^2 = 0 \quad (\text{для тензора } I^\oplus), \\ \rho^2 &= \mathbf{x}' \cdot G^\oplus \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (\text{для тензора } G^\oplus = \text{Const}). \end{aligned}$$

Здесь  $\rho^2$  обозначает квадратичный метрический инвариант. Как отсюда видно, на конусе метрика везде нулевая. Вершина изотропного конуса находится в начале координат. Его образующие – центральные прямые лучи. В свою очередь, изотропный конус как гиперповерхность разделяет пространство на две части ( $n \geq q$ ). Это внешняя полость конуса, где  $\rho^2 > 0$ . (Внешняя полость – объединённое множество всех  $\langle E^n \rangle$ .) И это внутренняя полость конуса, где  $\rho^2 < 0$ . (Внутренняя полость – объединённое множество всех  $\langle E^q \rangle$ .)

При  $q = 1$ , а именно в пространстве Минковского, последняя как геометрический объект распадается ещё на 2 части. Как принято в СТО, это верхняя внутренняя полость, или конус будущего – с положительным направлением оси  $\vec{u}$  и это нижняя внутренняя полость, или конус прошлого – с отрицательным направлением оси  $\vec{u}$ . В данном случае линейное подпространство  $\langle E^q \rangle$  вырождается в направленную ось  $\vec{u}$  (в СТО – стрела времени). Кроме того, внешняя и внутренняя

полости содержат одно- и двухсвязный гиперболоиды Минковского – гиперповерхности с инвариантами  $\rho^2 > 0$  и  $\rho^2 < 0$ .

В псевдоевклидовом пространстве метрические инварианты первой степени (гл. 9), как и метрика, – либо вещественные (вне конуса), либо мнимые (внутри конуса), либо нулевые (на конусе). Вещественные инварианты определяются также как *пространствуподобные*; мнимые инварианты определяются также как *времениподобные* (как принято в СТО). В случае же  $n < q$  понятия “вещественный” и “мнимый” меняются местами, если пространство мнимонизируют. (Изоморфизм между псевдоевклидовым и псевдоантиевклидовым пространствами.)

Собственные углы в ротациях (460), в формах  $W$  или аналогичные углы между линейными объектами – вещественные величины, но либо сферические ( $\theta_k$  или  $\theta_t$ ), либо гиперболические ( $\gamma_j$ ). Покажем это исходя из ротационных матриц (460) самой простой структуры, согласованной с знакопостоянными и знакопеременными фрагментами тензора  $I^\oplus$ . В диагональных формах таких нетривиальных структур нет. Однако в формах  $W$  таковыми структурами являются только два чистых ротационных тригонометрических типа, изученные ранее в гл. 5 и 6:

$$T = \{\text{Rot}(\pm\Theta)\}_{\text{can}} \leftrightarrow \{I^\oplus\}, \quad (468)$$

$\cos\theta_k$	$\mp\sin\theta_k$
$\pm\sin\theta_k$	$\cos\theta_k$

$\pm 1$	$0$
$0$	$\pm 1$

$$T = \{\text{Roth}(\pm\Gamma)\}_{\text{can}} \leftrightarrow \{I^\oplus\}, \quad (469)$$

$\text{ch}\gamma_j$	$\pm\text{sh}\gamma_j$
$\pm\text{sh}\gamma_j$	$\text{ch}\gamma_j$

$\pm 1$	$0$
$0$	$\mp 1$

Из этих прародительских структур путём допустимого модального преобразования  $R_W'$  порождаются два *чистых* типа ротационных матриц  $T$ , выражаемых в каком-либо универсальном базисе как базисе своего действия, а именно:

$$\left. \begin{aligned} R_{W_{(1)}} \cdot \{\text{Rot } \Theta\}_{\text{can}} \cdot R'_{W_{(1)}} &= \text{Rot } \Theta = T_{(1)}, \\ T_{(1)}' \cdot T_{(1)} &= I = T_{(1)} \cdot T_{(1)}', \quad \det T_{(1)} = +1; \end{aligned} \right\} \quad (470)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{W_{(2)}} \cdot \{\text{Roth } \Gamma\}_{\text{can}} \cdot R'_{W_{(2)}} &= \text{Roth } \Gamma = T_{(2)}, \\ T_{(2)} &= T_{(2)}', \quad \det T_{(2)} = +1. \end{aligned} \right\} \quad (471)$$

Заметим, что применение модальных матриц, несогласованных с тензором  $I^\oplus$ , привело бы к изменению последнего, то есть к нарушению

условия (460). Следовательно, группа  $\langle T \rangle$  включает как чистые типы две существующие разновидности вещественных ротационных матриц бинарной тригонометрической структуры:  $\text{Rot } \Theta$  и  $\text{Roth } \Gamma$  (гл. 6). В самом общем случае эти матрицы в преобразовании  $T$  могут образовывать какую-либо последовательность частных сферических и гиперболических ротаций, выраженных в универсальном базисе:

$$T = \dots \cdot \text{Rot } \Theta_{(t-1)t} \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \dots . \quad (472)$$

Однако все частные ротации должны быть тригонометрически согласованы с тензором  $I^\oplus$ . Данное согласование, имея ввиду структуры ротационных матриц и тензора, означает следующее. Сферические ротации, согласно (468), должны отвечать либо положительной, либо отрицательной единичным частям тензора, либо быть их произведением, необходимо коммутативным:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rot } \Theta & I^\oplus \\ \hline \text{Rot } \Theta^{n \times n} & Z^{n \times q} \\ \hline Z^{q \times n} & \text{Rot } \Theta^{q \times q} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline I^{n \times n} & Z^{n \times q} \\ \hline Z^{q \times n} & -I^{q \times q} \\ \hline \end{array} . \quad (473)$$

Гиперболические ротации, согласно (469), своими тригонометрическими клетками должны отвечать двум равным блокам, взятым из положительной и отрицательной единичных частей рефлектор-тензора. В частности, при  $q = 1$  они имеют формы (363), (364).

### § 11.3. Полярное представление псевдоевклидовых ротаций

Любое линейное непрерывное *геометрическое* преобразование в пределах одной из вышеуказанных полостей изотропного конуса всегда сводится к какому-то тригонометрическому преобразованию из группы  $\langle T \rangle$ . При этом в универсальном базисе любое общее преобразование (460) через полярное представление сводится к произведению одной ортосферической и одной гиперболической ротационных матриц:

$$T = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta = \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \tilde{\Gamma}, \quad (474), (475)$$

$$\text{где } \text{Roth } \Gamma = \sqrt{T T'} = \sqrt{\text{Roth } 2 \Gamma},$$

$$\text{Roth } \tilde{\Gamma} = \sqrt{T' T} = \sqrt{\text{Roth } 2 \tilde{\Gamma}},$$

$$\text{Rot } \Theta = \sqrt{T T'}^{-1} \cdot T = \text{Roth } (-\Gamma) \cdot T = T \cdot \sqrt{T' T}^{-1} = T \cdot \text{Roth } (-\tilde{\Gamma}),$$

$$\text{Roth } \tilde{\Gamma} = \text{Rot}' \Theta \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta. \quad (476)$$

Полярное представление выводится следующим образом:

$$T = \sqrt{TT'} \cdot R = R \cdot (R' \cdot \sqrt{TT'} \cdot R) = R \cdot \sqrt{T'T},$$

$$(R' \cdot TT' \cdot R = T'T), \det T = +1 \rightarrow \det R = +1 \rightarrow R = \text{Rot } \Theta;$$

$$(460) \rightarrow (TT') \cdot I^\oplus \cdot (TT') = I^\oplus = (T'T) \cdot I^\oplus \cdot (T'T) \rightarrow (471) \rightarrow$$

$$\begin{cases} \rightarrow TT' = \text{Roth } 2\Gamma, \sqrt{TT'} = \text{Roth } \Gamma \rightarrow (474). \\ \rightarrow T'T = \text{Roth } 2\tilde{\Gamma}, \sqrt{T'T} = \text{Roth } \tilde{\Gamma} \rightarrow (475) \rightarrow (476). \end{cases}$$

Отметим, что в силу (476),  $\tilde{\Gamma}$  и  $\Gamma$  имеют один и тот же спектр  $\langle \gamma_j \rangle$ .

Далее полярное представление-произведение общего ротационного преобразования применяется для упрощённого описания многоступенчатых гиперболических ротаций и, в частности, таковых релятивистских движений в СТО, а также многоступенчатых движений во внешних и во внутренних сферической и гиперболической геометриях. Заметим, что в классическом полярном представлении модального линейного преобразования

$$V = \sqrt{VV'} \cdot R = R \cdot \sqrt{V'V} \quad (477), (478)$$

матрицы  $R$  и  $\sqrt{V'V}$  выражены в координатах какого-либо единичного декартова базиса. В этом базисе они являются самостоятельными преобразованиями – ортогональным и симметричным. Но по геометрической сути полярного представления эти преобразования действуют последовательно, а именно ортогональное – в базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , симметричное – в базисе  $\tilde{E} = R \cdot \tilde{E}_1 = \{R\}$ . Поэтому второе преобразование  $\sqrt{V'V}$  нужно транслировать из координат базиса  $\tilde{E}$  в координаты базиса  $\tilde{E}_1$ . Тогда обе матрицы в произведении (477) выражаются в исходном базисе  $\tilde{E}_1$ :  $V = (R \cdot \sqrt{V'V} \cdot R') \cdot R = \sqrt{VV'} \cdot R$ . Если же использовать матрицы преобразований в координатах базисов, где они действуют, то есть в исконном виде, то тогда их последовательность в полярном представлении становится обратной, что соответствует (478). В этом заключается суть различия между формами (477) и (478). Тот же смысл наглядно проявляется при пассивном преобразовании координат одного и того же линейного элемента:

$$u = V^{-1} \cdot u^{(1)} = \sqrt{V'V}^{-1} \cdot R' \cdot u^{(1)} = \sqrt{V'V}^{-1} \cdot u^{(1s)}, \quad (479)$$

где каждое из обратных преобразований действует в своем базисе.

В линейном псевдоевклидовом пространстве выделим множество правых псевдодекартовых базисов  $\langle T \cdot \tilde{E}_1 \rangle$ . Все они ротационно конгруэнтны. Переход из  $\tilde{E}_1$  к новому базису  $\tilde{E}$ , согласно (474), (475), представляется в двух полярных формах:

$$\tilde{E} = T \cdot \tilde{E}_1 = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta\}, \quad (480)$$

$$\tilde{E} = T \cdot \tilde{E}_1 = \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \tilde{\Gamma} \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \tilde{\Gamma}\}. \quad (481)$$

Здесь ротационные матрицы  $\text{Rot } \Theta$  и  $\text{Roth } \tilde{\Gamma}$  выражены в координатах какого-либо единичного универсального базиса. В этом базисе их можно рассматривать как самостоятельные ротационные преобразования – сферическое и гиперболическое. Но в полярном представлении они действуют последовательно. А именно сферическое – в базисе  $\tilde{E}_1 = \{\Pi\}$ , гиперболическое – в базисе  $\tilde{E}_{1u} = \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{Rot } \Theta\}$ . После трансляции второго преобразования из  $\tilde{E}_{1u}$  в  $\tilde{E}_1$  обе матрицы выражаются в  $\tilde{E}_1$ , что соответствует (480). Если же использовать матрицы преобразований в координатах базисов, где они действуют, то тогда их последовательность в полярном представлении становится обратной, что соответствует (481). Итак, истинно гиперболическая ротация Roth  $\Gamma$  совершается в базисе  $\tilde{E}_{1u}$  после сферической ротации исходного базиса  $\tilde{E}_1$ .

В матрице любого псевдодекартового базиса  $\tilde{E}_i$  первые  $n$  столбцов задают собственное  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(i)}$ , остальные  $q$  столбцов задают собственное  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(i)}$  метрического тензора  $I^\oplus$  в сумме (452). С учётом структуры (473) для матрицы  $\text{Rot } \Theta$  при преобразовании из любого универсального базиса (467) новые собственные подпространства  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  задаются тождественно столбцами любой из матриц:  $\tilde{E}$ ,  $T$  и  $\text{Roth } \Gamma$ . Например, из (480) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathcal{E}^n \rangle &\equiv \text{im} [\tilde{E}]^{(n+q) \times n} \equiv \text{im} [T]^{(n+q) \times n} \equiv \text{im} [\text{Roth } \Gamma]^{(n+q) \times n}, \\ \langle \mathcal{E}^q \rangle &\equiv \text{im} [\tilde{E}]^{(n+q) \times q} \equiv \text{im} [T]^{(n+q) \times q} \equiv \text{im} [\text{Roth } \Gamma]^{(n+q) \times q}, \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

где в квадратных скобках взяты либо первые  $n$ , либо остальные  $q$  столбцов. В частности, в пространстве Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$  при преобразовании из универсального базиса новые  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и ось  $\vec{y}$  задаются тождественно столбцами матриц:  $\tilde{E}$ ,  $T$  и  $\text{roth } \Gamma$ . Последняя как *элементарная* имеет структуру (363), (364). Смысл сказанного состоит в том, что любое тригонометрическое преобразование (460), применительно к собственным евклидовым подпространствам  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  в целом как множествам точечных элементов, в исходном универсальном базисе сводится к их чисто гиперболической ротации, взятой из представления (474). В частности, это справедливо для оси  $\vec{y}$  в пространстве Минковского, так как она в целом является собственным подпространством тензора  $I^\oplus$ . Следовательно, используя полярное представление (474), любое сложное тригонометрическое преобразование  $T$  универсального базиса, например многоступенчатое, для собственных подпространств метрического тензора сводится

к их чисто гиперболической ротации Roth  $\Gamma = \sqrt{\mathbf{T}\mathbf{T}'}$ . Напомним, что матрицы всех псевдодекартовых базисов (которые, в частности, задают собственные подпространства метрического рефлектор-тензора) выражаются в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1 = \{\mathbf{I}\}$ . В универсальных координатных базисах в СТО описываются мировые события (процессы и фиксации) именно с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя. Среди них  $\tilde{E}_1 = \{\mathbf{I}\}$  – простейший по форме исходный базис. В частности, в универсальных базисах реализуется сферическо-гиперболическая аналогия любого конкретного типа, например синус-тangentанская (§ 6. 2).

Кроме того, заметим, что при  $q=1$  матрица  $\text{Rot } \Theta^{q \times q}$  в (473) вырождается в единицу. Поэтому в  $\langle P^{n+1} \rangle$  непрерывное преобразование Лоренца любой точки на оси  $\vec{y}$ , независимо от исходного базиса, сводится к её чисто гиперболической ротации – либо как тензорного точечного объекта (при пассивном преобразовании координат), либо как производящего точечного элемента (при активном преобразовании координат). Дадим два примера, которые представляют интерес в СТО и в гиперболической геометрии, а именно:

$$\mathbf{u}^{(j)} = T_{lj}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \text{roth}^{-1} \tilde{\Gamma}_{lj} \cdot \text{rot}^{-1} \Theta_{lj} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \{\text{roth}^{-1} \tilde{\Gamma}_{lj}\}_{\tilde{E}_{lu}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \quad (483)$$

где  $\mathbf{u}^{(1)}$  – точечный объект, выраженный в базисе  $\tilde{E}_1$ , причём  $\mathbf{u}^{(1)} \in \langle \vec{y} \rangle^{(1)}$ ;  $\mathbf{u}^{(j)}$  – тот же точечный объект в базисе  $\tilde{E}_j = T_{lj} \cdot \tilde{E}_1$ .  
 $(T_{lj}$  – пассивное преобразование координат объекта.)

$$\mathbf{u}_j = T \cdot \mathbf{u}_1 = \text{roth } \Gamma_{lj} \cdot \text{rot } \Theta_{lj} \cdot \mathbf{u}_1 = \text{roth } \Gamma_{lj} \cdot \mathbf{u}_1, \quad (484)$$

где  $\mathbf{u}_1$  – производящий точечный элемент, причём  $\mathbf{u}_1 \in \langle \vec{y} \rangle^{(1)}$ ;  
 $\mathbf{u}_j$  – результирующий точечный элемент.  
 $(T$  – активное преобразование координат элемента.)

Вышеизложенное представление общего тригонометрического преобразования собственных подпространств в целом их гиперболической ротацией, вообще говоря, не относится к каким-либо подмножествам этих подпространств, например к координатным осям базиса. Из (481), где матрицы выражены в базисах своего действия, но даны в обратном порядке, следует, что координатные оси последовательно подвергаются сферической ротации  $\text{Rot } \Theta$  и гиперболической ротации Roth  $\tilde{\Gamma}$ .

Матрица преобразования  $T$  может рассматриваться как двухвалентный, псевдоевклидово квазиортогональный тензор в силу (460). То же относится и к матрице базиса  $\tilde{E} = T \cdot \{\mathbf{I}\}$ . Этот тензор расщепляется на пару однородных и пару смешанных тензоров, то есть однородные ( $n \times n$  и  $q \times q$ ) и смешанные ( $n \times q$  и  $q \times n$ ) бипроекции:

$[\tilde{E}]^{n \times n}$  – проекция на исходное  $\langle E^n \rangle$  пространствуподобных единичных векторов базиса как проекции базиса на новое  $\langle E^n \rangle$ ;

$[\tilde{E}]^{q \times q}$  – проекция на исходное  $\langle E^q \rangle$  времениподобных единичных векторов базиса как проекции базиса на новое  $\langle E^q \rangle$ ;

$[\tilde{E}]^{n \times q}$  и  $[\tilde{E}]^{q \times n}$  – аналогичные смешанные проекции.

При транспонировании матрицы базиса проекции отражаются зеркально относительно её главной диагонали. Это, например, происходит при изменении последовательности многоступенчатых гиперболических ротаций на противоположную.

#### § 11.4. Многоступенчатые гиперболические ротации

Многоступенчатые гиперболические ротации в случае тригонометрической согласованности ротационных матриц между собой (гл. 5, 6) остаются чисто гиперболическими. Это соответствует в ротациях (363), (364) и в СТО для суммируемых движений (скоростей) равенству направляющих косинусов с точностью до общего коэффициента  $\langle \pm 1 \rangle$ . При этом гиперболические углы в итоговой ротационной матрице суммируются алгебраически, то есть с учётом знака данного коэффициента. Но если частные ротационные матрицы не согласованы тригонометрически между собой (хотя все они согласованы с рефлектор-тензором), то тогда многоступенчатые гиперболические ротации сводятся, как правило, к общему тригонометрическому преобразованию, в том числе в полярных формах (474), (475). Пусть в каком-либо единичном базисе  $\{I\}$  заданы матрицы частных гиперболических ротаций:

$$\text{Roth } \Gamma_{12}, \text{Roth } \Gamma_{23}, \dots, \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t}.$$

Как преобразования они осуществляются последовательно в базисах:

$$\tilde{E}_1 = \{I\}, \quad \tilde{E}_2 = \{\text{Roth } \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{t-1} = \{\text{Roth } \Gamma_{(t-2)(t-1)}\}_{(\tilde{E}_{t-2})} \cdot \tilde{E}_{t-2}.$$

После трансляции матриц частных ротаций из координат базисов, где они действуют, в координаты исходного базиса  $\tilde{E}_1$  получаем формулу итогового многоступенчатого преобразования базиса

$$\tilde{E}_t = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \tilde{E}_1. \quad (485)$$

Например, её можно доказать по индукции, начиная с  $t=3$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 &= \{\text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \text{Roth }^{-1} \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \{\text{Roth } \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \tilde{E}_1 = \\ &= \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \tilde{E}_1. \end{aligned} \quad (486)$$

В формулах (485), (486) в итоге имеет место обратный порядок расположения частных гиперболических матриц, так как они задают последовательные преобразования базиса в координатах собственных единичных базисов.

В свою очередь, координаты тензорных объектов преобразуются *пассивно*, но в прямом порядке расположения матриц:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \text{Roth}(-\Gamma_{(t-1)t}) \cdot \dots \cdot \text{Roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \text{Roth}(-\Gamma_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \quad (487)$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = \text{Roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \text{Roth}(-\Gamma_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \text{Roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \mathbf{u}^{(2)}. \quad (488)$$

Здесь модальные матрицы также выражены в координатах собственных единичных базисов  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_{t-1}$ , то есть как они были заданы исконно в единичном базисе  $\{\mathbf{I}\}$ .

В псевдоевклидовой геометрии матрица чисто гиперболической ротации – либо симметричная, либо нет, но всегда простая. Всё зависит от того, в каком базисе она действует и выражается. Общее правило тут такое. Эта матрица всегда симметрична в любом псевдодекартовом базисе *своего действия*  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$  как модальная. В координатах же исходного базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  при  $\mathbf{T} \notin \langle \text{Rot } \Theta \rangle$  она несимметрична. Матрицы вида  $\{\mathbf{T} \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot \mathbf{T}^{-1}\}_{\tilde{\mathbf{E}}_1}$  и  $\{\text{Roth } \Gamma\}_{\tilde{\mathbf{E}}}$  представляют одну и ту же гиперболическую ротацию, заданную соответственно в универсальном базисе и в псевдодекартовом базисе *своего действия*. Простая матрица гиперболической ротации также принадлежит группе Лоренца. Её  $W$ -форма и собственные углы  $\gamma_j$  – те же, что и у симметричной матрицы. Это выделяет множество чисто гиперболических ротаций с простыми матрицами в группе Лоренца.

Конечно, аналогичные выводы относятся к сферическим ротациям  $\{\mathbf{T} \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \mathbf{T}^{-1}\}_{\tilde{\mathbf{E}}_1}$  и  $\{\text{Rot } \Theta\}_{\tilde{\mathbf{E}}}$ . Они, как и гиперболические ротации, могут быть выражены либо в универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ , либо в базисе *своего действия*  $\tilde{\mathbf{E}}$ .

При *активном* многоступенчатом гиперболическом ротационном преобразовании производящего точечного элемента в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  частные модальные матрицы образуют обратный порядок, так как те же матрицы действуют последовательно в своих базисах:

$$\mathbf{u}_t = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \mathbf{u}_1, \quad (489)$$

$$\mathbf{u}_3 = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \mathbf{u}_1 = \{\text{Roth } \Gamma_{23}\}_{\tilde{\mathbf{E}}_2} \cdot \mathbf{u}_2. \quad (490)$$

Все вышеуказанные соотношения (485) – (490) выражают частные случаи общего *правила многоступенчатых линейных преобразований*. Например, аналогичные последовательности из сферических ротационных матриц составляются в евклидовой геометрии для многоступенчатых сферических движений.

Для анализа многоступенчатых гиперболических ротаций используется полярное представление:

$$\tilde{E}_j = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \tilde{\Gamma} \cdot \tilde{E}_1, \quad (491)$$

$$\mathbf{u}^{(j)} = \text{Roth } (-\tilde{\Gamma}) \cdot \text{Rot } (-\Theta) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \{\text{Roth } (-\tilde{\Gamma})\}_{\tilde{E}_{1u}} \cdot \mathbf{u}^{(1u)}, \quad (492)$$

$$\mathbf{A}^{(j)} = \text{Roth } (-\tilde{\Gamma}) \cdot \text{Rot } (-\Theta) \cdot \mathbf{A}^{(1)} = \{\text{Roth } (-\tilde{\Gamma})\}_{\tilde{E}_{1u}} \cdot \mathbf{A}^{(1u)}. \quad (493)$$

Таким образом, двух- и многоступенчатые гиперболические ротации в общем случае разлагаются на две составные ротации чистых типов: сферическую и гиперболическую.

Согласно (491) во втором варианте, сначала осуществляется внутренняя сферическая ротация на угол  $\Theta$  исходного базиса  $\tilde{E}_1$  вместе с  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1)}$  (на  $\Theta^{n \times n}$ ) и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1)}$  (на  $\Theta^{q \times q}$ ). При этом указанные собственные подпространства в целом как множества остаются постоянными. Затем осуществляется гиперболическая ротация на угол  $\tilde{\Gamma}$  смешённого базиса  $\tilde{E}_{1u}$  вместе с  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1u)}$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1u)}$ . Именно так она воспринимается из  $\tilde{E}_{1u}$ . Но в  $\tilde{E}_1$  эта же ротация воспринимается как на тензорный угол  $\Gamma$  по первому варианту (491).

В формулах (492), (493) выражены соответствующие изменения координат одновалентного тензорного объекта (линейного элемента  $\mathbf{u}$  или линеора  $\mathbf{A}$ ). Эти изменения геометрически воспринимаются так, как если объект сначала был подвергнут сферической ротации на угол  $\Theta$ , а затем гиперболической ротации на угол  $\tilde{\Gamma}$ . Но последняя из  $\tilde{E}_1$  воспринимается как ротация  $\Gamma$ . В пространстве Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$  как пространстве событий СТО это изменение первоначальной сферической ориентации на угол  $\Theta$  неточечного объекта в евклидовом подпространстве в результате последовательного сложения скоростей с отличающимися направлениями является тоже релятивистским эффектом (именуемым по физической терминологии как *буст*), равно как и гиперболический характер закона сложения скоростей. В свою очередь, в общем псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{n+q} \rangle$  изменяется внутренняя сферическая ориентация гиперболических проекций тензорного объекта в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  (на угол  $\Theta^{n \times n}$ ) и в  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  (на угол  $\Theta^{q \times q}$ ) относительно декартовых осей базиса этих подпространств. При противоположной последовательности частных ротаций имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}' \quad (T \rightarrow T'), \\ [\tilde{E}]^{n \times q} \rightarrow \{[\tilde{E}]^{q \times n}\}', \\ \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}. \end{array} \right\} \quad (494)$$

(Последнее объясняет дополнительное обозначение для угла  $\tilde{\Gamma}$ .)

Обратим также внимание на то, что многоступенчатые ортосферические ротации, в соответствии с их структурой (473), имеют конечным результатом опять-таки ортосферическую ротацию.

Многоступенчатые гиперболические ротации точечного элемента последовательно производят реперные точки (вершины) каких-либо геометрических фигур, например гиперболических многоугольников. Для реализации последних необходимое условие – замкнутость цикла гиперболических ротаций:

$$\prod_{k \geq 3} \text{Roth } \Gamma_{(k)} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \text{ где } \mathbf{u}_1 \text{ принадлежит } \langle \mathcal{E}^{n,(1)} \rangle \text{ или } \langle \mathcal{E}^{q,(1)} \rangle.$$

В силу непрерывности частных ротаций такие централизованные фигуры расположены в одной из полостей изотропного конуса – там, где находится элемент  $\mathbf{u}_1$ , причём  $\rho(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}_1) = \text{const}$ . Фигуры и их геометрия реализуются на какой-либо гиперболоидной поверхности с заданным инвариантом  $\rho$ . Непрерывные преобразования Лоренца включают в себя тригонометрические ротации  $\langle T \rangle$  и параллельные переносы. Они осуществляют любые непрерывные движения в псевдоевклидовой геометрии.

С другой стороны, однородные преобразования Лоренца  $\langle T \rangle$ , используемые активно, осуществляют движения производящего точечного элемента ( $\mathbf{u} = T \cdot \mathbf{u}_1$ ) на той же гиперболоидной (псевдо-сферической) поверхности:

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{t=1}^q y_t^2 = \rho^2(\mathbf{u}_1) = \text{const}, \quad (495)$$

где  $\rho^2(\mathbf{u}_1)$  – квадратичный метрический инвариант. Эта централизованная гиперповерхность находится либо во внешней полости конуса ( $\rho^2 > 0$ ), либо во внутренней полости конуса ( $\rho^2 < 0$ ), либо она есть конус ( $\rho = 0$ ). Она же как многообразие есть функция от метрического инварианта. Метрика псевдосферической гиперповерхности – внешняя, псевдоевклидова. Её родственные подмножества – псевдосферические  $m$ -поверхности меньшей размерности и псевдоокружности ( $m = 1$ ). С точки зрения аффинной геометрии они же суть гиперболоидные поверхности и гиперболы. Каждую из них можно представить как гиперповерхность в некотором своём подпространстве  $\langle P^{n'+q'} \rangle \subset \langle P^{n+q} \rangle$ , где  $1 \leq n' \leq n$ ,  $1 \leq q' \leq q$ . В частности, любая гипербола на гиперповерхности (495) принадлежит некоторой своей псевдоплоскости.

## Глава 12. Тригонометрия псевдоевклидова пространства Минковского

### § 12.1. Проективные тригонометрические модели сопутствующих гиперболических геометрий

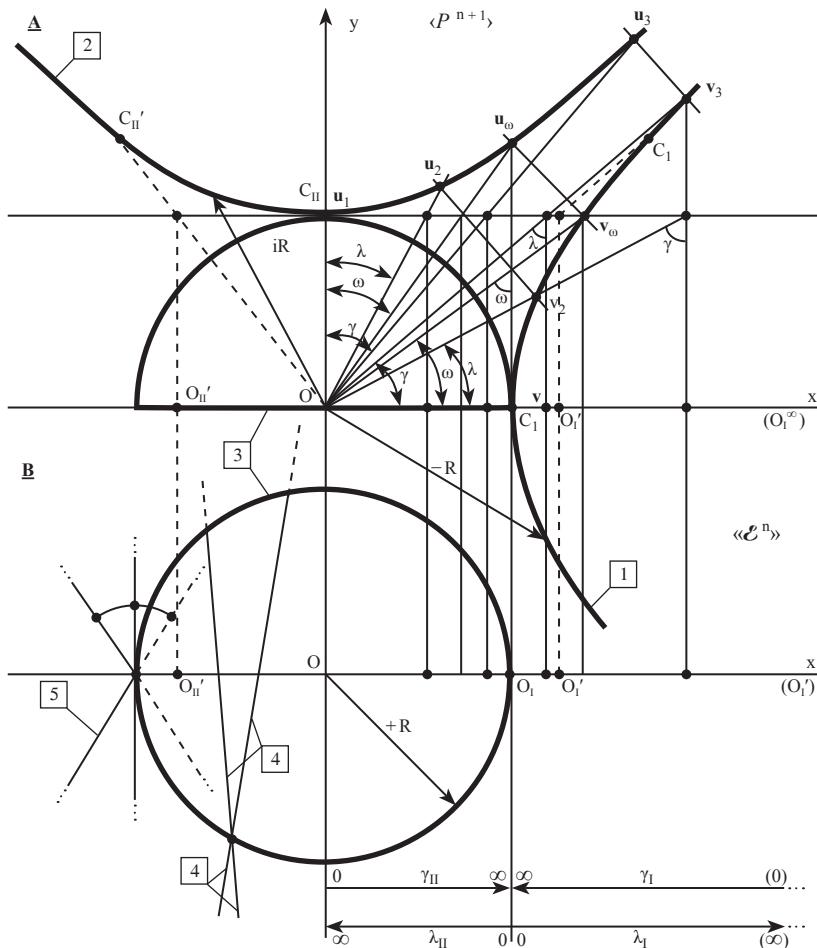
В  $\langle P^{n+1} \rangle$  реализуется псевдоевклидова геометрия Минковского. Две псевдосферические гиперповерхности в нём ( $n \geq 2$ ,  $q = 1$ ), отличающиеся знаком квадратичного инварианта (+ или -), в аффинном смысле, суть пара сопутствующих гиперболоидов. Геометрическим путём они производятся сферической ротацией относительно направленной оси  $\vec{u}$  с числом степеней свободы ( $n - 1$ ) соответственно одной времениподобной гиперболы (например правой) и двух пространствуподобных гипербол (верхней и нижней) – см. рис. 3. Первый из них (топологически односвязный, с инвариантом  $\rho^2 = + R^2$ ) находится во внешней полости конуса. Второй из них (топологически двухсвязный, с инвариантом  $\rho^2 = - R^2$ ) находится по отдельности в двух внутренних полостях конуса – верхней и нижней. В метрическом смысле эти объекты представляют собой две гиперпсевдосфера – одна с вещественным ( $\pm R$ ), а другая с мнимым ( $\pm iR$ ) радиусом. (В том же смысле изотропный конус есть гиперпсевдосфера нулевого радиуса.) Они известны как гиперболоиды Минковского I и II. На этих сопутствующих гиперболоидах реализуются особые *внешние гиперболические геометрии* с псевдоевклидовой метрикой в  $\langle P^{n+1} \rangle$ . Их название обусловлено тем, что гиперболические траектории на гиперболоидах Минковского – геодезические линии (в указанной *внешней* метрике).

Если некая гиперболическая траектория проходит по какой-либо псевдосфере меньшей размерности ( $1 < n' < n$ ), принадлежащей гиперболоиду Минковского, то она и на данной поверхности остаётся геодезической. При  $n' = 1$ , то есть на собственной секущей псевдоплоскости, остаётся только гипербола, сама по себе. Здесь на псевдоплоскости в координатах  $(x, y)$  легко определяется её псевдоевклидова протяжённость (гл. 6), так как длина данной кривой остаётся той же.

Централизованные геодезические движения производящего элемента  $\mathbf{u}_1$  (рис. 4) по гиперболоиду с инвариантом  $\rho(\mathbf{u}_1)$  осуществляют ротационная матрица-функция  $\text{roth } \Gamma = F(\gamma)$ , согласно структуре (363), (364). Нецентрализованное геодезическое движение производящего элемента  $\mathbf{u} = T \cdot \mathbf{u}_1$  по тому же гиперболоиду осуществляет ротационная матрица  $\{\text{roth } \Gamma\}_{\tilde{E}}$ , или  $\{T \cdot \text{roth } \Gamma \cdot T^{-1}\}_{\tilde{E}_1}$ , где  $\tilde{E} = T \cdot \tilde{E}_1$ . Причём  $\gamma$  изменяется непрерывно от 0 до  $+\infty$  ( $dy > 0$ ) или от 0 до  $-\infty$  ( $dy < 0$ ). Протяжённость геодезической траектории на обоих гиперболоидах определяется формально также, как псевдоевклидова длина гиперболической дуги (гл. 6) в пределах псевдоплоскости. А именно, как  $a = R \cdot \gamma$  (на гиперболоиде II) и как  $ia = iR \cdot \gamma$  (на гиперболоиде I). Выражение для данной характеристики протяжённости « $a$ » тождественно таковому для меры Ламберта, принятой в гиперболической неевклидовой геометрии.

Для двухсвязного гиперболоида II этот факт объясняется тем, что внешняя гиперболическая геометрия на нём изоморфна в целом (а, следовательно, и в малом) внутренней гиперболической геометрии Лобачевского – Больля при одних и тех же  $n$  и  $R$ . Причём различие геометрий на *верхней* и на *нижней* частях гиперболоида II заключается только в перемене знаков перед гиперболическими углами  $\Gamma$  и  $\gamma$  (обращении ротационной матрицы  $\text{roth } \Gamma$ ) для зеркально симметричных движений на них относительно гиперплоскости  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1)}$ . Но при этом всегда для этих углов при  $dy > 0$  применяется знак «+», а при  $dy < 0$  применяется знак «–». Углы  $\Gamma$  и  $(-\Gamma)$  имеют тождественный вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_a$ . То же относится к двум соответствующим антиподным частям гиперболического пространства Лобачевского – Больля. Последнее, как и гиперболоид II, по сути двухсвязное.

Изоморфизм в целом внешней геометрии на гиперболоиде II и внутренней геометрии Лобачевского – Больля наиболее просто доказывают тем, что они обе приводятся центральными проективными преобразованиями к одной и той же форме – модели Клейна внутри овального абсолюта Кэли [25; 38, ч. II, с. 178 – 193]. Для внешней геометрии на гиперболоиде II модель Клейна (внутри абсолюта) есть её центральное проективное отображение (рис. 4) на проективную гиперплоскость  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . С тригонометрической точки зрения модель Клейна (внутри абсолюта) есть её тангенсное отображение в векторной форме ( $\gamma \xrightarrow{\text{th}} \mathbf{th } \gamma, \cos \alpha_k = \text{const}_k$ ), или тангенсная проекция на централизованную  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . Для геометрии Лобачевского – Больля модель Клейна есть её центральное проективное отображение на указанную проективную гиперплоскость  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . (Заметим, что впервые эту модель для неё предложил Бельтрами.) Все эти отображения по отношению к гиперплоскости проектирования – двухсторонние и двухсвязные.



**Рис. 4.** А) Тригонометрические соответствия точек гиперболоидов Минковского I и II в псевдоплоскости ротации.

Б) Проективные модели Клейна гиперболоида II (тангенсная) и I (котангенсная), относительно овального абсолюта Кэли, на проективной гиперплоскости.

(1) гиперболоид I, (2) гиперболоид II, (3) абсолют Кэли, (4) пара смежно параллельных прямых (геодезических) внутри и вне абсолюта, (5) различные варианты соответствий прямых внутри и вне абсолюта.

Общим для них является то, что мера Ламберта трансформируется в проективную меру. Кроме того, изоморфизм в целом, как известно, включает одну и ту же топологию геометрических пространств

с точностью до их гомеоморфизма. В рассматриваемом случае это есть топология внутренней области овального абсолюта Кэли. Поскольку последняя не включает в себя абсолют, то есть не имеет границы, то такая область проективной гиперплоскости  $\langle\mathcal{E}^n\rangle$  топологически эквивалентна  $\langle\mathcal{E}^n\rangle$ . (То же относится к двум антиподным пространствам Лобачевского – Больши и к обеим частям гиперболоида II.) Все они по сути имеют топологию  $\langle\mathcal{A}^n\rangle$ .

Внутри овального абсолюта на проективной гиперплоскости  $\langle\mathcal{E}^n\rangle$  действует проективная мера в тангенсной форме  $\langle R \cdot \text{th } a / R \rangle$ , отождествляемая с евклидовой мерой. В модели Клейна внутри абсолюта проективная мера ограничена радиусом  $R$ . При  $R \rightarrow \infty$  гиперболоид II и пространство Лобачевского – Больши трансформируются в  $\langle\mathcal{E}^n\rangle$ . Если  $\gamma = a/R \rightarrow 0$ , то есть либо  $a \rightarrow 0$ , либо  $R \rightarrow \infty$ , то  $R \cdot \text{th } a/R \rightarrow a$ ; при этом в обоих вариантах меры Ламберта и Евклида совпадают.

В свою очередь, для односвязного гиперболоида I тождественность псевдоевклидовой меры и меры Ламберта объясняется тем, что внешняя гиперболическая геометрия на нём изоморфна в целом (а, следовательно, и в малом) внутренней цилиндрической гиперболической геометрии. Цилиндрическое гиперболическое пространство отличается от пространства Лобачевского–Больши с той же метрикой только в большом, а именно тем, что оно топологически эквивалентно цилиндрическому евклидову пространству или наиболее общо – аффинному цилиндуру.

Обе гиперболические геометрии с цилиндрической топологией центральными проективными преобразованиями приводятся к одной и той же форме – модели Клейна вне овального абсолюта Кэли. Для внешней геометрии на гиперболоиде I модель Клейна (вне абсолюта) есть её центральное проективное отображение (рис. 4) на проективную гиперплоскость  $\langle\mathcal{E}^n\rangle$ .

С тригонометрической точки зрения модель Клейна (вне абсолюта) есть её котангенсное отображение в векторной форме ( $\gamma \mapsto \text{cth } \gamma, \cos \alpha_k = \text{const}_k$ ), или котангенсная проекция на централизованную  $\langle\mathcal{E}^n\rangle$ . В другой, *тангенсной цилиндрической модели*, ортогональной предыдущей, тангенсная проекция отображается на боковую гиперповерхность централизованного гиперцилиндра с радиусом  $R$  и с высотой  $2R$ , расположенного между двумя овальными абсолютаами. Для цилиндрической гиперболической геометрии модель Клейна (вне абсолюта) есть её центральное проективное отображение на указанную гиперплоскость  $\langle\mathcal{E}^n\rangle$ ; а цилиндрическая модель есть её последующее гомеоморфное отображение на цилиндрическую евклидову гиперповерхность радиуса  $R$ . Все отображения в модели Клейна (вне абсолюта) по отношению к гиперплоскости проектирования – двухсторонние и односвязные.

Последнее свойство обусловлено непрерывностью отображения гиперболоида I на обе стороны области гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ », находящейся вне абсолюта. (Топологическая связь между обеими этими сторонами модели Клейна осуществляется через бесконечно удалённую условную границу проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ ».) Для цилиндрической модели это же утверждение вполне очевидно. Гиперболоид I и соответственно цилиндрическое гиперболическое пространство аналогично, но не топологически разделяются на две половинные части – с положительным и с отрицательным направлением оси  $\vec{y}$ . Цилиндрическая модель также разделяется пополам гиперплоскостью « $\mathcal{E}^n$ ». Выбор знака для углов движений  $\Gamma$  и  $\gamma$  осуществляется, согласно вышеуказанной схеме, с учётом направления оси  $\vec{y}$  (по знаку  $dy$ ). В модели Клейна вне овального абсолюта на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » действует проективная мера в котангенсной форме « $R \cdot \text{cth } a / R$ », отождествляемая с евклидовой мерой. При  $R \rightarrow \infty$  гиперболоид I и цилиндрическое гиперболическое пространство вырождаются вместе с абсолютом в бесконечно удалённую границу проективной гиперплоскости. В цилиндрической модели на внутренней области между двумя овальными абсолютами на проективном гиперцилиндре действует проективная мера в тангенсной форме, а именно как « $R \cdot \text{th } a / R$ », отождествляемая с евклидовой мерой. Если  $a \rightarrow 0$ , то  $\gamma = a/R \rightarrow 0$  и  $R \cdot \text{th } a / R \rightarrow a$ ; при этом меры Ламберта и Евклида совпадают. В этом отображении  $(n-1)$ -мерный центральный пояс гиперболоида I и цилиндрической модели (радиуса  $R$ ) является автоморфизмом. Причём в модели Клейна вне абсолюта ему соответствует бесконечно удалённая граница проективной гиперплоскости.

Кроме того, гиперболоид I и цилиндрическое гиперболическое пространство, в принципе, возможно отобразить изометрично в целом на гиперпсевдосферу Бельтрами с теми же параметрами  $n$  и  $R$ . При этом последняя рассматривается как топологически односвязная гиперповерхность (эквивалентная цилиндрической гиперповерхности). Гиперболическая геометрия на её верхней и нижней частях увязывается воедино с положительными, нулевым и отрицательными значениями угла  $\gamma$ . (Доказательство данного изоморфизма приводится в главе 6А Приложения.)

Уравнение овального абсолюта для всех вышеуказанных гиперболических геометрий (2-х внешних и 2-х внутренних) одно и то же:  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = R^2$ . Сумма 2-х сопутствующих неевклидовых пространств

и разделительного изотропного конуса отображается двухсторонне

на всю проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ ». Точно также сумма двух гиперболоидов Минковского и изотропного конуса отображается двухсторонне на всю « $\mathcal{E}^n$ ». Данная конструкция в  $\langle P^{n+1} \rangle$ , состоящая из гиперболоидов I и II Минковского, в том числе в её тангенсно-котангенсном отображении на проективную гиперплоскость или в её тангенсном отображении на проективный гиперцилиндр по сути олицетворяет некое трёхсвязное гиперболическое пространство. Его внешняя, односвязная часть трактуется как гиперболическое неевклидово пространство с парой антиподных «чёрных дыр». Роль последних выполняют антиподные пространства Лобачевского – Больяни.

В моделях Клейна оба сопутствующие гиперболические пространства трансформируются в области проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » внутри и вне абсолюта радиуса  $R$ . С учётом последнего факта, если прямые (геодезические) и их формальные продолжения в односторонних тангенсно-котангенсных моделях Клейна (внутри и вне абсолюта) рассматриваются вместе, то тогда их *смежная параллельность* в сопутствующих пространствах обусловливается на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » пересечением в какой-либо точке абсолюта (рис. 4). В цилиндрической модели оба сопутствующие гиперболические пространства трансформируются в два основания и в боковую поверхность *проективного гиперцилиндра*. Диаметр и высота этого гиперцилиндра равны  $2R$ .

Обе сопутствующие геометрии вместе с геометрией изотропного конуса целесообразно, на наш взгляд, трактовать как *единую гиперболическую геометрию* с группой Лоренца, задаваемой рефлектор-тензором в псевдоевклидовом пространстве Минковского.

Гиперболическая траектория, или геодезическая (прямая) на гиперболоидах I и II всегда представима как их сечение некоторой централизованной псевдоплоскостью. Ей же тождественна собственная псевдоплоскость тензорного угла  $\Gamma$  в ротационной матрице  $\{\text{roth } \Gamma\}_{\mathbb{E}}$ , в которой проецируются тригонометрические функции тангенса и котангенса. (Именно в этом состоит причина прямолинейности проекций геодезических в обеих моделях Клейна!) При этом гиперболический угол в матрице может быть задан параметрически через псевдоевклидову длину геодезической:  $\gamma = a/R$  и  $\Gamma = A/R$ . В модели Клейна внутри абсолюта это сечение-геодезическая вместе с псевдоплоскостью (в границах сечения) проецируется в евклидов отрезок прямой, проходящей через круг (2-х мерный вариант) или шар (3-х мерный вариант) в овальном абсолюте. Геодезическая в целом отображается соответствующей хордой. Заметим также, что углы между геодезическими в модели Клейна не искажаются

при условии, что проективные прямые (для гиперболоида II) или их формальные продолжения (для гиперболоида I) встречаются в центре абсолюта. Для гиперболоида II это тождественно принадлежности его *центрального элемента*  $\mathbf{u}_1$  (рис. 4) пересекающимся геодезическим. В данном случае матрица ротации  $\{\text{roth } \Gamma\}_{E_1}$  симметрична и имеет каноническую форму (363), задавая движение центрального исходного элемента  $\mathbf{u}_1$  по централизованной геодезической. Для произвольного элемента этого гиперболоида  $\mathbf{u}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \mathbf{u}_1$  ротационная матрица преобразуется координатно пассивно из симметричной, а именно как  $\{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12}\}_{E_1}$ , задавая его движение по произвольной геодезической. Здесь и выше излагается общий подход к изучению гиперболических движений в обеих сопутствующих неевклидовых геометриях как некоторого тригонометрического подмножества преобразований Лоренца, то есть с применением тензорной тригонометрии объемлющего псевдоевклидова пространства.

Если геометрический центр хорды исходя из центра проектирования принять за точку начала отсчета функции  $\text{th } \gamma < +1$  (условно справа) и  $\text{th } \gamma > -1$  (условно слева), то евклидово расстояние по *внутренней* хорде-геодезической в модели Клейна внутри абсолюта связано с истинным псевдоевклидовым или неевклидовым расстоянием мерой ЛамBERTA по формуле ( $\gamma_2 > \gamma_1$ ):

$$\begin{aligned} a_{12} = a_2 - a_1 &= R \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) = R \cdot \gamma_{12} = 1/2 R \cdot \left[ \ln \frac{1 + \text{th } \gamma_2}{1 - \text{th } \gamma_2} - \ln \frac{1 + \text{th } \gamma_1}{1 - \text{th } \gamma_1} \right] = \\ &= R \cdot \ln \sqrt{\frac{(1 + \text{th } \gamma_2) \cdot (1 - \text{th } \gamma_1)}{(1 - \text{th } \gamma_2) \cdot (1 + \text{th } \gamma_1)}}. \end{aligned}$$

Соответственно евклидово расстояние по *внешней* хорде-геодезической в модели Клейна вне абсолюта связано с неевклидовым расстоянием соотношением:

$$a_{12} = R \cdot \ln \sqrt{\frac{(\text{cth } \gamma_2 + 1) \cdot (\text{cth } \gamma_1 - 1)}{(\text{cth } \gamma_2 - 1) \cdot (\text{cth } \gamma_1 + 1)}}.$$

Обе формулы получены тригонометрическим способом, но изначально они исходят из проективного мероопределения Кэли – Клейна. (Формула искажения сферического угла между прямыми в модели Клейна в гиперболической трактовке дана в гл. 7А Приложения.)

Идея о возможности реализации полноценной геометрии, в которой не выполняется V-ый постулат Евклида, или справедлива гипотеза острого угла Саккери, на особой поверхности – “какой-нибудь мнимой сфере” (цитата), как известно, впервые была высказана Ламбертом в 1766 г. [21, 24]. Впоследствии было уточнено, что первое её свойство относится к геометрии в большом, а второе – к геометрии в малом.

(В полноценной геометрии – с полной свободой движения фигур они взаимосвязаны.) Тауринус предложил аналитическую модель такой геометрии на *гипотетической сфере* *мнимого радиуса* по аналогии с геометрией вещественной сферы. Тем самым он обосновал непротиворечивость её планиметрии. *Интуитивная* геометрия Ламберта–Таурина предвосхитила *реальную* геометрию на гиперболоиде II и исторически предшествующий ей вещественный изоморфизм – геометрию Лобачевского – Больяи [7, 24, 31]. Бельтрами показал её реализуемость, но как геометрии в малом, на *особой* гиперповерхности евклидова пространства – *псевдосфере* (которую ранее открыл и изучил Миндинг). Проективная модель Бельтрами – Клейна свёла проблему её непротиворечивости в целом к таковой для евклидовой геометрии. Гильберт доказал невозможность реализации в трёхмерном евклидовом пространстве двумерной геометрии Лобачевского – Больяи в целом на какой-то вложенной в него *неособой* римановой поверхности, то есть как внутренней геометрии Гаусса [25, 26].

Однако последнее вовсе не означает невозможность её реализации в целом на какой-то неособой римановой поверхности, вложенной в  $(3+k)$ -мерное евклидово надпространство. Как известно [13], такая поверхность определяется постоянной и отрицательной римановой кривизной. Но если бы удалось описать её как вложение в евклидово надпространство *минимальной* размерности, то тогда решение задачи Бельтрами [21] было бы доведено до логического конца. Конкретные результаты в этом направлении получили последовательно Блануша – для  $\langle E^6 \rangle$ , Розендорн – для  $\langle E^5 \rangle$  и Сабитов – для  $\langle E^4 \rangle$  [40, 41]. (Та же проблема остаётся и для вложения неевклидовых пространств в целом.)

Хорошо известно, что определение римановой поверхности и её геометрии оторвано не от объемлющего евклидова надпространства, а только от его размерности. Апостериори размерность последнего может быть вполне определённой. С другой стороны, имманентная размерность римановой поверхности всегда одна и та же для любого её гомеоморфизма. Она совпадает с размерностью касательного евклидова пространства, обобщившего одномерную касательную к *кривой, самой по себе*. Из напрашивающейся здесь аналогии достаточно указать, что бесконечная регулярная кривая с *постоянной сферической кривизной* не реализуется на плоскости, но зато она реализуется в трёхмерном евклидовом пространстве в виде винтовой линии. Такого же типа кривая, но с *постоянной гиперболической кривизной* реализуется на псевдоплоскости в виде гиперболы. Изометричные отображения одной и той же неевклидовой геометрии на различных поверхностях: гиперболоиде II Минковского, плоскости Лобачевского – Больяи, римановой поверхности с постоянной отрицательной кривизной – отличаются весьма значительно по степени сложности и наглядности.

С другой стороны, сопутствующая цилиндрическая гиперболическая геометрия реализуется как в псевдоевклидовом пространстве – на гиперболоиде I Минковского, так и в вещественном евклидовом пространстве – на гиперпсевдосфере Бельтрами как изоморфизмы. Эти гиперболические геометрии имеют один и тот же характеристический радиус и гомеоморфны по топологии своих подпространств.

Рассекая проективный гиперцилиндр какой-либо централизованной псевдоплоскостью, получаем в сечении четыре смежных бесконечных прямых в 3-х гиперболических пространствах. В данном отображении они образуют замкнутую фигуру – четырёхугольник. Его четыре вершины лежат попарно на двух овальных абсолютах – верхнем и нижнем. Каждая из этих четырёх прямых с заданным центром проектирования однозначно задаёт три других и секущую псевдоплоскость.

Точечные элементы на гиперболоидах Минковского I и II исходно определяются внешними, псевдодекартовыми координатами  $\langle x_{\overline{1,n}}, y \rangle$ , например в  $\tilde{E}_1 = \{\Pi\}$ . Кроме того, они также взаимно-однозначно исходно определяются специальными угловыми координатами, но уже на конкретном гиперболоиде Минковского. Последний в  $\tilde{E}_1$  задаётся радиус-вектором ( $iR$  – гиперболоид II,  $R$  – гиперболоид I). Для элементов гиперболоида II  $y$  – реперная косинусная ось ( $+y$  на верхней части и  $-y$  на нижней части). Для элементов гиперболоида I  $y$  – синусная ось. Внутренние угловые координаты включают в себя параметры: гиперболический угол  $\gamma$  с учётом знака для обеих частей гиперболоида (отмеряемый от реперной оси  $y$  для гиперболоида II и от реперной гиперплоскости « $\mathcal{C}^n$ » для гиперболоида I) и его же направляющие косинусы  $\langle \cos \alpha_{\overline{1,n}} \rangle$ . Ввиду того что  $\sum_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k = 1$ , для задания элемента достаточно  $n$  независимых угловых координат.

Между точками *одного и того же* гиперболоида устанавливается парное соответствие из условия равенства их дополнительных друг к другу гиперболических угловых координат и направляющих косинусов (рис.4):  $u_2 \leftrightarrow u_3$ ,  $v_2 \leftrightarrow v_3$  ( $u_\omega \leftrightarrow u_\omega$ ,  $v_\omega \leftrightarrow v_\omega$ );  $\gamma_{12} = \lambda_{13} \leftrightarrow \lambda_{12} = \gamma_{13}$ ,  $\omega = \text{Arsh } 1$ ,  $\cos \alpha_k = \text{const}_k$ .

Между точками *различных* гиперболоидов I и II также устанавливается парное соответствие. Оно задаётся из условия равенства их одноимённых друг к другу гиперболических угловых координат и направляющих косинусов (рис.4):  $u_2 \leftrightarrow v_2$ ,  $u_3 \leftrightarrow v_3$  ( $u_\omega \leftrightarrow v_\omega$ );  $\gamma_{12_{II}} = \gamma_{12_I} \leftrightarrow \lambda_{12_{II}} = \lambda_{12_I}$ ,  $\gamma_{13_{I}} = \gamma_{13_{II}} \leftrightarrow \lambda_{13_{II}} = \lambda_{13_I}$ ,  $\cos \alpha_k = \text{const}_k$ . С геометрической точки зрения такое соответствие означает зеркальную симметрию пары точечных элементов  $u_t$  и  $v_t$  относительно изотропного конуса.

Отметим одно исключение: точечный элемент  $\mathbf{u}_1$  отображается в  $\mathbf{u}_\infty$  и в  $\mathbf{v}_1$  только при задании направляющих косинусов; обратно же:  $\mathbf{u}_\infty \rightarrow \mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1$ . (Но  $\mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_\infty$ ,  $\cos \alpha_k = \text{const}_k$ .)

В связи с этим каждая прямая (геодезическая) гиперболоида II взаимно-однозначно отображается через изотропный конус в прямую (геодезическую) гиперболоиду I, а в модели Клейна – через овальный абсолют. В тангенсном отображении гиперболоида II ( $\gamma_{II} \rightarrow \infty$ ) и в котангенсном отображении гиперболоида I ( $\gamma_I \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_I = 0$ ) абсолют соответствует их периферии.

При активных однородных преобразованиях Лоренца универсального базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\Gamma\}$  исходная реперная точка  $C_{II}$  на оси  $\tilde{y}$ , от которой в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  отчитываются углы  $\gamma_{II}$ , перемещается по гиперболоиду II в любую другую его точку  $C_{II}'$  (в пределах одной его части). При этом её исходная тангенсная проекция  $O$  в модели Клейна перемещается из центра абсолюта в соответствующую точку  $O_{II}'$  внутри абсолюта. От этой точки отчитываются угловые расстояния (отрезки) внутри абсолюта мерой Ламберта  $\gamma_{II}$  в новом псевдодекартовом базисе.

Аналогичным образом, при тех же преобразованиях  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\Gamma\}$  точка  $C_I$  с направляющими косинусами  $\langle \cos \alpha_{I,n} \rangle$ , от которой в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  отчитываются углы  $\gamma_I$ , перемещается по гиперболоиду I в любую другую его точку  $C_I'$  (причём  $C_I' \leftrightarrow C_{II}'$ ). При этом её исходная котангенсная проекция  $O_I^\infty$  в модели Клейна перемещается из бесконечно удалённой точки (на границе « $\mathcal{E}^n$ ») в соответствующую точку  $O_I'$  вне абсолюта. От этой точки отчитываются угловые расстояния (отрезки) вне абсолюта мерой Ламберта  $\gamma_I$  в новом псевдодекартовом базисе.

Следует отметить, что тензорные углы  $\Gamma$  и  $\Lambda$ , как и бесконечный прямой угол, – все в одном и том же гиперболически прямоугольном треугольнике согласованы тригонометрически между собой (§ 6.4). В гиперболически прямоугольных треугольниках две стороны (катеты) гиперболически ортогональны (рис.4). Противолежащие этим катетам углы  $\gamma$  и  $\lambda$  по сути дополнительные друг к другу. То же относится к тензорным углам  $\Gamma$  и  $\Lambda$ . С учётом формул (356), (360) имеем:

$$\operatorname{th}(\pm \gamma, \lambda) \equiv \operatorname{sch}(\lambda, \gamma), \quad \operatorname{th}(\pm \Gamma, \Lambda) \equiv \operatorname{sch}(\Lambda, \Gamma);$$

$$\operatorname{cth}(\pm \gamma, \lambda) \equiv \operatorname{ch}(\lambda, \gamma), \quad \operatorname{cth}(\pm \Gamma, \Lambda) \equiv \operatorname{ch}(\Lambda, \Gamma);$$

$$\operatorname{sh}(\gamma, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(\lambda, \gamma) = 1, \quad \operatorname{sh}(\Gamma, \Lambda) \cdot \operatorname{sh}(\Lambda, \Gamma) = 1.$$

$$\operatorname{ch}^2(\Gamma, \Lambda) - \operatorname{sh}^2(\Gamma, \Lambda) = 1 = \operatorname{cth}^2(\Lambda, \Gamma) - \operatorname{cosch}^2(\Lambda, \Gamma);$$

$$\operatorname{th}^2(\Gamma, \Lambda) + \operatorname{sch}^2(\Gamma, \Lambda) = 1 = \operatorname{sch}^2(\Lambda, \Gamma) + \operatorname{th}^2(\Lambda, \Gamma); \text{ где } \gamma + \lambda < \infty.$$

(Следствие: сумма гиперболических углов псевдоевклидова треугольника меньше двух прямых углов.)

Заметим, что тождественные тензорные функции приводятся в тригонометрическом базисе к разным каноническим формам (левые к обычным, правые к особым для первого случая и наоборот – для второго случая). В псевдоевклидовом пространстве Минковского, согласно (324), (326) и (363) – (365), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{roth } \Gamma &= F_1(\gamma, e_\alpha) = \operatorname{ch} \Gamma + \operatorname{sh} \Gamma \equiv F_2(\lambda, e_\alpha) = \operatorname{cth}(\pm \Lambda) + \operatorname{cosh} \Lambda, \\ \text{defsh } \Gamma &= F_3(\gamma, e_\alpha) = \operatorname{sch} \Gamma + i \cdot \operatorname{th} \Gamma \equiv F_4(\lambda, e_\alpha) = \operatorname{th}(\pm \Lambda) \pm i \cdot \operatorname{sch} \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (496)$$

С использованием сферическо-гиперболической аналогии абстрактного типа (323) осуществляется формальный переход от моделей движения в гиперболической геометрии к моделям движения в сферической геометрии. Ранее такой же подход, но в обратную сторону применялся при выводе структур матриц гиперболических ротаций (363), (364) из уже доказанных структур матриц сферических ротаций (313), (314) с реперной осью.

Изоморфизм ротаций в объемлющем централизованном «квазиевклидовом, псевдоевклидовом» пространстве и геометрических движений на вложенной в него «сферической, псевдосферической» гиперповерхности связывает также изоморфно внешнюю ротационную тригонометрию объемлющего пространства и внутреннюю геометрию гиперповерхности с данным инвариантом. В частности, ротационные тригонометрии в квазиевклидовом пространстве с реперной осью и в пространстве Минковского размерности  $(n+1)$  изоморфны геометриям на  $n$ -мерной сфере и  $n$ -мерных гиперболоидах Минковского I и II (в сопутствующих  $n$ -мерных гиперболических неевклидовых пространствах) с учётом их инварианта – радиуса  $R$ .

## § 12.2. Ротации и деформации в псевдоевклидовом пространстве Минковского

Далее на примере простейших псевдоевклидовых пространств Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$ , где  $n \leq 3$ , покажем: как работает формула (474) для классификации псевдоевклидовых ротаций, или непрерывных однородных движений Лоренца. Конечно, данная формула применима для этого и в более сложных случаях.

При  $n = 1$  возможна только элементарная гиперболическая ротация, автоматически согласованная с рефлектор-тензором. Эта ротация реализуется геометрически как движение по гиперболе.

При  $n = 2$  возможны элементарная сферическая ротация (в пределах множества централизованных плоскостей в трёхмерной внешней полости изотропного конуса) и элементарная гиперболическая ротация

(в пределах множества централизованных псевдоплоскостей с осью  $\vec{u}$  в трёхмерной внутренней полости изотропного конуса). Эти ротации реализуются как движения по сферическим и гиперболическим траекториям на двумерных гиперболоидах Минковского I и II.

При  $n = 3$  возможны элементарная сферическая ротация (в пределах множества централизованных плоскостей в четырёхмерной внешней полости изотропного конуса) и элементарная гиперболическая ротация (в пределах множества централизованных псевдоплоскостей с осью  $\vec{u}$  в четырёхмерной внутренней полости изотропного конуса). Эти ротации реализуются как движения по сферическим и гиперболическим траекториям на трёхмерных гиперболоидах Минковского I и II.

Итак, при  $n \leq 3$  и  $q = 1$  любые тригонометрические ротации Лоренца, согласно (474), сводятся к однократной элементарной ортосферической ротации  $\text{rot } \Theta$  и затем однократной элементарной гиперболической ротации  $\text{roth } \Gamma$ , согласованным с рефлектор-тензором псевдоевклидова пространства Минковского. Сферическая ротация элементарна, в силу того что  $n \leq 3$  в структуре (473). Гиперболическая ротация элементарна в любом пространстве Минковского.

В данном случае между  $\text{rot } \Theta$  и  $\text{roth } \Gamma$  имеется принципиальное отличие, заключающееся в формах их представлений. Гиперболическая ротация имеет реперную ось  $\vec{u}$  для отсчёта угла  $\gamma$ . Её структура (363), (364) и псевдоплоскость ротации  $\gamma$  определяются вектором направляющих косинусов (выраженных в декартовой части базиса). Форма представления  $\text{rot } \Theta$  определяется только её общей структурой (473). Например, в  $\langle P^{2+1} \rangle$  её  $2 \times 2$ -блок есть элементарная сферическая ротационная клетка. Однако в  $\langle P^{3+1} \rangle$  её  $3 \times 3$ -блок  $\text{rot } \Theta_{3 \times 3}$  целесообразно представить как сферическую ротацию с фиксированной нормальной осью  $r_N$  [27, с.448]. Тогда структура и плоскость ротации  $\theta$  определяются вектором направляющих косинусов нормальной оси ротации  $r_N \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (выраженных в декартовой части базиса):

$\text{rot } \Theta$			
$\cos \theta + \frac{r_1^2}{1 + \cos \theta}$	$-r_3 + \frac{r_1 \cdot r_2}{1 + \cos \theta}$	$+r_2 + \frac{r_1 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	0
$+r_3 + \frac{r_1 \cdot r_2}{1 + \cos \theta}$	$\cos \theta + \frac{r_2^2}{1 + \cos \theta}$	$-r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	0
$-r_2 + \frac{r_1 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	$+r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	$\cos \theta + \frac{r_3^2}{1 + \cos \theta}$	0
0	0	0	1

. (497)

Пусть  $\cos \sigma_k$  и  $\cos \bar{\sigma}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – направляющие косинусы углов  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  из (474), (475) в структуре (363);  $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  и  $\mathbf{e}_{\bar{\sigma}} = \{\cos \bar{\sigma}_k\}$  – единичные векторы направляющих косинусов в структуре (364). Применив ротационную формулу (476), последовательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' \Theta_{3 \times 3} \cdot \{ \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_\sigma \} \cdot \text{rot} \Theta_{3 \times 3} &= \mathbf{e}_{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{e}'_{\bar{\sigma}}, \\ \mathbf{e}_{\bar{\sigma}} &= \text{rot}' \Theta_{3 \times 3} \cdot \mathbf{e}_\sigma, \end{aligned} \right\} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' = \overleftarrow{\mathbf{e}} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}'). \quad (498)$$

В  $\langle P^{3+1} \rangle$  единичные векторы  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_{\bar{\sigma}}$  в силу (498) однозначно задают вектор нормальной оси ротации  $\text{rot } \Theta$  через их векторное (синусное) произведение:

$$\mathbf{r}_N = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_{\bar{\sigma}} \otimes \mathbf{e}_\sigma = \begin{vmatrix} \cos \bar{\sigma}_2 \cdot \cos \sigma_3 - \cos \bar{\sigma}_3 \cdot \cos \sigma_2 \\ \cos \bar{\sigma}_3 \cdot \cos \sigma_1 - \cos \bar{\sigma}_1 \cdot \cos \sigma_3 \\ \cos \bar{\sigma}_1 \cdot \cos \sigma_2 - \cos \bar{\sigma}_2 \cdot \cos \sigma_1 \end{vmatrix}. \quad (499)$$

Векторы  $\mathbf{e}_{\bar{\sigma}}$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{r}_N$  образуют правую тройку, что соответствует принятому в работе направлению отсчёта угла  $\theta$  против часовой стрелки; ориентированный вектор  $\mathbf{r}_N$  задаёт правый винт ротации;

$$\|\mathbf{r}_N\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = |\sin \theta|; \quad \text{tr rot } \Theta = 2 \cdot (\cos \theta + 1).$$

Наряду с чисто гиперболическими и сферическими ротациями в псевдоевклидовом пространстве Минковского представляют особый интерес, *а именно в универсальном базисе*, допустимые элементарные гиперболические деформации. В тригонометрической форме они представлены в (496). В базисе своего действия они имеют структуру типа (365) и совершаются в псевдоплоскости, соответствующей углу  $\Gamma$ . Направляющие косинусы для матриц  $\text{roth } \Gamma$  и  $\text{defh } \Gamma$  тождественны. В базисе диагонального косинуса эти матрицы и рефлектор-тензор имеют общую бинарно-клеточную структуру:

$$\begin{array}{c} \{\text{defh } \Gamma\}_{\text{can}} \\ \begin{pmatrix} \text{sch } \gamma & -\text{th } \gamma \\ \text{th } \gamma & \text{sch } \gamma \end{pmatrix}, \end{array} \quad \begin{array}{c} \{\text{roth } \Gamma\}_{\text{can}} \\ \begin{pmatrix} \text{ch } \gamma & \text{sh } \gamma \\ \text{sh } \gamma & \text{ch } \gamma \end{pmatrix}, \end{array} \quad \begin{array}{c} I^\oplus (q=1) \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Из прародительской структуры, аналогично (471), порождается чистый тип гиперболической деформационной матрицы:

$$\left. \begin{aligned} R_w \cdot \{\text{defh } \Gamma\}_{\text{can}} \cdot R_w' &= \text{defh } \Gamma, \\ \text{defh}' \Gamma \cdot \text{defh } \Gamma &= I = \text{defh } \Gamma \cdot \text{defh}' \Gamma, \quad (\det \text{defh } \Gamma = +1). \end{aligned} \right\} \quad (500)$$

Деформационные преобразования, конечно, не относятся к группе Лоренца, так как не удовлетворяют условию (460). Хотя при этом соотношения (500) по форме и совпадают с (470). Но согласования матриц  $\text{rot } \Theta$  и  $\text{defh } \Gamma$  с рефлектор-тензором  $I^\oplus$  осуществляются различно. А именно первые согласуются по его единичному блоку, а вторые согласуются по какой-либо его знакопеременной  $2 \times 2$ -клетке. Иначе говоря, первые действуют в плоскостях, а вторые – в псевдо-плоскостях. Хотя матрицы  $\text{defh } \Gamma$  не удовлетворяют псевдоевклидову метрическому соотношению (460), но они же в универсальном базисе формально удовлетворяют евклидову метрическому соотношению, что следует из (500). Поэтому для этих матриц в псевдоплоскости деформации действует *перекрёстный евклидов инвариант* (§ 5.10). Согласно сферическо-гиперболической аналогии конкретного, синус-тангенсного типа в  $\tilde{E}_1$ , имеем:

$$\text{defh } \Gamma \equiv \text{rot } \Phi(\Gamma) \leftrightarrow \text{th } \Gamma \equiv \sin \Phi(\Gamma)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\text{roth } \Gamma \equiv \text{def } \Phi(\Gamma) \leftrightarrow \text{sh } \Gamma \equiv \tan \Phi(\Gamma).$$

Ввиду того что все матрицы действуют в одной и той же псевдоплоскости, то и согласуются с рефлектор-тензором сходным образом:

$$\text{defh } \Gamma \cdot I^\oplus \cdot \text{defh } \Gamma = \text{rot } \Phi(\Gamma) \cdot I^\oplus \cdot \text{rot } \Phi(\Gamma) =$$

$$= \text{roth } \Gamma \cdot I^\oplus \cdot \text{roth } \Gamma = \text{def } \Phi(\Gamma) \cdot I^\oplus \cdot \text{def } \Phi(\Gamma) = I^\oplus.$$

Важно отметить, что все эти четыре соотношения в *универсальном базисе*  $\tilde{E}_1$  имеют место как в гиперболической, так и в сферической геометриях. Поэтому они представлены здесь в самом общем виде – через углы ротаций  $\Gamma$  и  $\Phi$  с рефлектор-тензором  $I^\oplus \equiv \text{Ref}$ . Основное различие между ними заключается в том, что в гиперболической геометрии в *допустимом псевдодекартовом базисе* в  $\langle P^{n+1} \rangle$  действует только определяющее движения соотношение  $\text{roth } \Gamma \cdot I^\oplus \cdot \text{roth } \Gamma = I^\oplus$ ; с другой стороны, в сферической геометрии в *допустимом квазидекартовом базисе* в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  действует только определяющее движения соотношение  $\text{rot } \Phi \cdot I^\oplus \cdot \text{rot } \Phi = I^\oplus$ . Во внешних вариантах они реализуются на собственных гиперболоидах Минковского I и II в псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{n+1} \rangle$  (первое) и на собственном гиперсферионде в квазивклидовом пространстве  $\langle Q^{n+1} \rangle$  (второе).

Основные свойства деформационных матриц и преобразований сходны с таковыми для ротационных. Но для них Правило №2, в части алгебраического суммирования тригонометрически согласованных углов-аргументов, не выполняется. (Хотя коммутативность матриц с согласованными углами сохраняется.) Деформационные матрицы

целесообразно применять в  $\langle P^{n+1} \rangle$ , например, при *перекрёстном* (недекартовом) проецировании, то есть при определении перекрёстных координат или перекрёстных проекций. Такое проецирование в  $\langle P^{3+1} \rangle$  формально математически интерпретирует лоренцево сокращение пространственных образов линейных объектов в направлении их физического движения. Согласно исконной блочной структуре (442), для деформационных матриц имеют место соотношения – аналоги (482).

### § 12.3. Специальный математический принцип относительности

Все утверждения, относящиеся к «евклидовой, квазиевклидовой, псевдоевклидовой» геометрии за вычетом её аффинной части, имеют место именно в «декартовом, квазидекартовом, псевдодекартовом» базисе «евклидова, квазиевклидова, псевдоевклидова» пространства. Любая геометрия с квадратичным инвариантом (или *квадратичная геометрия*) как свод утверждений по их форме никак не связана с выбором конкретного допустимого базиса за исходный единичный базис. Иначе говоря, «евклидова, квазиевклидова, псевдоевклидова» геометрия инвариантна по отношению к преобразованиям, осуществляющим переход от одного вышеуказанного базиса к другому, то есть она инвариантна к «ортогональным, квазиортогональным, псевдоортогональным» преобразованиям и к операции параллельного переноса в пространстве. (Ориентация в указанных пространствах, конечно, сохраняется именно при непрерывных преобразованиях.)

Это *специальный математический принцип относительности*, действующий в любой плоской (квадратичной) геометрии, в частности, в псевдоевклидовой геометрии Минковского. Применительно к СТО ему тождествен *специальный физический принцип относительности Планка*. Он заключается в форминвариантности физических законов в равномерно и прямолинейно движущихся системах отсчёта (вплоть до околосветовых скоростей), или относительно преобразований Лоренца. Оба принципа связывают *физико-математический изоморфизм*.

Ротационные преобразования Лоренца в активной форме оставляют инвариантными в целом каждую полость изотропного конуса и сам конус. Но при этом собственные подпространства  $\langle E^n \rangle$  и  $\langle E^q \rangle$  неинвариантны и преобразуются активно вместе с базисом. Хотя они вместе со своими координатными осями всегда находятся в своих полостях изотропного конуса – внешней и внутренней. Кроме того,  $\langle E^n \rangle$  и  $\langle E^q \rangle$  преобразуются активно так, что всегда составляют прямую сумму и остаются гиперболически ортогональными друг к другу.

Поэтому одноиндексные  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  относительны, но взаимозависимы как ортогональные дополнения в псевдоевклидовом пространстве. В соответствии с (462) каждое из них является взаимно-однозначной функцией от другого. В СТО это соотношение даёт математическую формулировку закона Пуанкаре – Эйнштейна об относительности, взаимозависимости и единстве пространства и времени ( $n = 3, q = 1$ ). Но само псевдоевклидово пространство  $\langle P^{n+q} \rangle$ , как и пространство-время Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle$ , – в целом абсолютно, то есть оно инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца (как множество точек данной структуры).

В четырёхмерном пространстве-времени Лагранжа  $\langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle$  законы нерелятивистской физики (механики), выраженные в инерциальных системах отсчёта, как и соответствующая евклидово-аффинная геометрия в нём, инвариантны по форме к преобразованиям Галилея. Это специальный принцип относительности Галилея в общей физико-математической форме. С математической точки зрения пространство-время Лагранжа – бинарное евклидово-аффинное пространство  $\langle \mathcal{E}^n \oplus \mathcal{A}^q \rangle$  с  $n = 3$  и  $q = 1$  с допустимыми в нём преобразованиями Галилея. Пространство-время Лагранжа в целом абсолютно, то есть инвариантно относительно последних (как множество точек данной структуры). По отношению к активным однородным преобразованиям Галилея евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  в целом и скалярное время  $\vec{t}$  тоже инвариантны; но стрела времени  $\vec{t}$  неинвариантна (каждый раз это какая-либо мировая линия). Она претерпевает, в том числе возможно на дифференциальном уровне, особое линейное преобразование – параллельную ротацию относительно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (сочетающее поворот на угол  $\varphi$  от исходной  $\vec{t}$  и компенсационное растяжение с коэффициентом  $\sec \varphi$ ). Данная ротация как бы промежуточна между сферической и гиперболической. Кроме того,  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и  $\vec{t}$  могут смещаться на вектор параллельного переноса. Евклидово подпространство и время образуют здесь единство, так как составляют прямую сумму, но они не взаимозависимы. Евклидово-аффинная геометрия по форме своих утверждений никак не связана с выбором конкретного бинарного декартово-аффинного базиса за исходный единичный базис. В универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\Pi\}$ , как принято ранее, четыре координатные оси ортонормированы. Допустимые базисы связаны общими непрерывными преобразованиями Галилея. Отметим, что евклидово-аффинная геометрия пространства-времени Лагранжа (индекса 1), отвечающая принципу относительности Галилея, тождественна “параболической” геометрии Клейна из его знаменитой Эрлангенской программы [26]. (Это было установлено в XX столетии в ряде математических исследований по неевклидовым геометриям и их связям с физикой [50].

С другой стороны, в  $\langle P^{3+1} \rangle$  при общих непрерывных преобразованиях Лоренца тензорные объекты подвергаются относительно базиса согласованным с рефлектор-тензором элементарным ортосферической и гиперболической ротациям, а также операции параллельного переноса. При этом исходные пространственные образы объектов подвергаются элементарной гиперболической деформации.

Именно гиперболические ротации и деформации с тригонометрической точки зрения ответственны за релятивистский характер преобразований Лоренца – Пуанкаре – Эйнштейна в абсолютном четырёхмерном пространстве-времени Минковского. Гиперболические ротации и деформации в элементарных канонических формах (363), (365) выражаются в универсальном базисе как в исходном, то есть как базисе своего действия.

Между ротационной тригонометрией в псевдоевклидовом пространстве Минковского, гиперболической геометрией на гипербoloидах Минковского I и II и гиперболической неевклидовой геометрией в сопутствующих пространственных топологических формах устанавливается отношение изоморфизма. Между сферической и гиперболической неевклидовыми геометриями на основе сферической-гиперболической аналогии абстрактного типа устанавливается формальная взаимосвязь, позволяющая увязать их собственные движения в единой теории в рамках тензорной тригонометрии надпространств  $\langle P^{n+1} \rangle$  и  $\langle Q^{n+1} \rangle$ .

Вышеизложенное позволяет создать как отдельное *приложение* тензорные тригонометрические модели кинематических преобразований в теории относительности, а также движений в гиперболической и в сферической (эллиптической) неевклидовых геометриях.



## *Приложение*

# **Тригонометрические модели движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности**

## **Введение**

В Приложении излагается конкретное применение тензорной тригонометрии в элементарных ротационной и деформационной формах к теоретическому анализу движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности. Поясним вкратце его содержание.

На основе сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа показан геометрический смысл сферического угла параллельности Лобачевского, проявляемый внешним образом в псевдоевклидовом пространстве Минковского исключительно в универсальном базисе. В СТО этот базис отвечает относительно неподвижному инерциальному наблюдателю. В отличие от своего сферического аналога-функции гиперболический угол движения имеет исконный (неискажённый) геометрический смысл в любых псевдодекартовых, или инерциальных базисах. (Глава 1А.)

Определены канонические формы тригонометрических тензоров основного движения и деформации. Показано, что именно эти тензоры обуславливают математически релятивистские эффекты замедления времени и сокращения протяжённости для движущихся объектов. Выявлены компоненты (по две проекции) этих эффектов с надлежащей тригонометрической и физической интерпретацией. (Главы 2А – 4А.)

С целью суммирования двух или любого иного количества движений (скоростей), а также для его тригонометрического анализа используется полярное разложение общего (суммарного) тензора движения. Закону суммирования движений (скоростей) придана генеральная форма, полученная в соответствии с правилом последовательного применения линейных преобразований. Изучены четырёхмерные тензорные тригонометрические модели кинематики и динамики СТО.

Показана взаимосвязь между конкретными тригонометрическими характеристиками и хорошо известными физическими параметрами движущихся объектов – как инерциально, так и неинерциально в пространстве-времени Минковского. Изложена трактовка физического движения как гиперболической ортопроекции абсолютного движения по мировым линиям. Получен релятивистский гиперболический аналог формулы Циолковского. (Главы 5А и 7А.)

В рамках изоморфного преобразования псевдоевклидова пространства Минковского в специальным образом сжатое квазиеуклидово пространство получены гиперболические отображения, определяющие трактису и псевдосферу Бельтрами как подобные однопараметрические фигуры в своих классах. (Глава 6А.)

Установлена теорема о приведении суммы двух движений к биортогональной (квадратичной) форме – коммутативной для евклидовой и некоммутативной для неевклидовых геометрий. Установлены формулы вычисления и общая тригонометрическая интерпретация для особой ортосферической ротации (по физической терминологии *буста*) неточечных объектов, в том числе координатного базиса, возникающей при неколлинеарном (негеодезическом) движении. Частный случай её описывает известная скалярная формула Зоммерфельда для прецессии Томаса при ортогональном суммировании двух скоростей. Доказана тождественность угла ортосферической ротации и сферической угловой девиации Гаусса – Бонне для двумерных замкнутых геометрических фигур, образуемых суммируемыми геодезическими отрезками на гиперболоидах Минковского или на гиперсфериоиде – поверхностях постоянного радиуса. Для геометрических объектов квазиеуклидова или псевдоевклидова пространства с индексом «1» возможно бесконечное множество разнообразных проективных преобразований. Показано, что любые тригонометрические проективные отображения гиперсфериоида и гиперболоидов Минковского I и II на проективную гиперплоскость или на проективный гиперцилиндр дают модели сферической и двух сопутствующих гиперболических геометрий. Для отображения движений в модели Клейна (внутри и вне абсолюта) тригонометрическим методом вычислены все коэффициенты искажения неевклидовых расстояний и углов. (Главы 7А и 8А.)

Последние две главы Приложения имеют дискуссионный характер и приводятся для завершённости рассматриваемого здесь тригонометрического представления движений в теории относительности. Известно, что ОТО в изначальной *геометрической* интерпретации А. Эйнштейна в силу своих многочисленных противоречий принимается далеко не всеми специалистами в области теории гравитации и небесной механики. Иные точки зрения отражены в известных книгах,

например: Бриллюэн Л. «Новый взгляд на теорию относительности» – М.: Мир, 1972; Боулер М. «Гравитация и относительность» – М.: Мир, 1979, а также в фундаментальных публикациях в научных журналах, например: Дикке Р. «Гравитация без принципа эквивалентности» Rev. Mod. Phys., v. 29, p. 363 (1957); Тирринг В. «Альтернативный подход к теории тяготения» Annals of Physics. v. 16, p. 96 (1961). Поэтому рассмотрение любых обобщений СТО в поле тяготения до сих пор имеет гипотетический характер и подлежит свободному непредвзятыму научному обсуждению. Автор данной монографии исходит из принципа максимальной простоты и непротиворечивости теории общепринятым фундаментальным законам Природы и данным наблюдений.

Показано, что все основные и достаточно хорошо изученные *общерелятивистские* эффекты, наблюдаемые в Солнечной системе, интерпретируются элементарным образом в базовом пространстве-времени Минковского, связанном с априори инерциальной системой Маха. Последнее отвечает, например, полевой (*негеометрической*) релятивистской теории гравитации (РТГ). Эта физическая теория как фундаментально обоснованная концепция впервые была изложена М. Боулером (1976 г.) в вышеуказанной известной учебной монографии. Аналогичная, но более развёрнутая по содержанию концепция РТГ и именно, как отрицающая ОТО, была развита позднее в публикациях А. А. Логунова с рядом коллег-соавторов. Данные исследования были недавно подытожены в фундаментальной монографии: Логунов А. А. «Теория гравитационного поля» – М.: Наука, 2001. В связи с этим здесь показаны дополнительные возможности для применения тензорной тригонометрии в теории относительности. (Глава 9А.)

С использованием изоморфного отображения координат материальной точки и её мировой линии из эффективного псевдориманова пространства-времени в базовое псевдоевклидово пространство-время (оба в РТГ имеют топологию аффинного пространства) рассмотрена гравитационно-неискажённая тензорная тригонометрическая модель абсолютного движения в гравитационном поле, в том числе при дополнительном воздействии сил иной природы. Развит четырёхмерный псевдоаналог классической теории Френе – Серре применительно к мировым линиям в пространстве-времени Минковского. Даны четыре абсолютные локальные скалярные и векторные дифференциально-геометрические характеристики искривлённой мировой линии, которые полностью определяют её конфигурацию, а также кинематику и динамику материальной точки в окрестности каждой собственной мировой точки. Вычислены все три абсолютные кривизны, связанные с мировыми тригонометрическими ротациями (от первого до третьего порядка), и их направления. (Глава 10А.)

## Дополнительные обозначения

- b** – единичный 4-вектор бинормали,  
**c** – скорость света в вакууме (пустоте),  
**c** – 4-вектор псевдоскорости абсолютного движения материи,  
 $\vec{ct}$  – стрела координатного времени в относительно неподвижном (универсальном) базисе  $\tilde{E}_1$ ,  
 $\vec{ct}$  – стрела собственного времени в мгновенном относительно подвижном базисе  $\tilde{E}_m$ ,  
**e** – единичный пространствуподобный вектор,  
 $e_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  – единичный вектор 1-го движения,  
 $e_\beta = \{\cos \beta_k\}$  – единичный вектор 2-го движения,  
 $e_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  – единичный вектор суммарного движения,  
 $e_{\bar{\sigma}} = \{\cos \bar{\sigma}_k\}$  – единичный вектор суммарного движения с обратной последовательностью частных движений,  
**E** – полная энергия,  
**F** – собственная сила в мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$ ,  
 $g$ ,  $\bar{g}$  и  $\hat{g}$  – внутреннее ускорение, его тангенциальная и нормальная проекции,  
**h** – единичный 4-вектор тринормали,  
**i** – единичный временниподобный 4-вектор в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , в том числе вектор касательной к мировой линии,  
**K** – абсолютная кривизна мировой линии (в данной её точке),  
**k**,  $\bar{k}$  и  $\hat{k}$  – 4-вектор абсолютной кривизны мировой линии, его тангенциальная и нормальная проекции,  
 $\ell$  и  $\hat{\ell}$  – евклидово и псевдоевклидово расстояние (длина),  
**m** и  $m_0$  – масса движущейся и покоящейся материальной точки,  
**n** – единичный ( $n + 1$ )-вектор нормали,  
**p**,  $\bar{p}$  и  $\hat{p}$  – единичные 4-векторы псевдонормали, её тангенциальной и нормальной проекций,  
**q**,  $\bar{q}$  и  $\hat{q}$  – единичные 4-векторы квазинормали, её тангенциальной и нормальной проекций,  
**P** – полный импульс,  
**p** – импульс (количество движения),

$R$  – радиус абсолютной кривизны мировой линии или радиус пространства с постоянной кривизной,  
 $t^{(i)}$  – координатное время в базисе  $\tilde{E}_i$ ,  
 $T$  и  $t$  – кручение и 4-вектор кручения,  
 $u$  – 4-радиус-вектор мировой точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ,  
 $v, v$  – векторная и скалярная координатная скорость физического движения,  
 $v^*, v^*$  – векторная и скалярная собственная скорость физического движения,  
 $w$  – сферическая угловая скалярная скорость,  
 $x^{(i)}$  – пространственная проекция мировой точки в базисе  $\tilde{E}_i$ ,  
 $x_k^{(i)}$  – пространственная координата мировой точки или материальной точки в базисе  $\tilde{E}_i$ ,  
 $\gamma, \gamma$  – основной гиперболический угол движения в каком-либо базисе  $\tilde{E}$  в векторной и скалярной формах,  
 $\varepsilon$  – скалярный угол между направляющими векторами 1-го и 2-го движения,  
 $\eta$  – гиперболическая угловая скалярная скорость,  
 $\Pi(\gamma)$  – сферический угол параллельности Лобачевского в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ ,  
 $\chi_k = x_k^{(1)}$  – собственная пространственная координата мировой точки, выражаемая в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ .

## Глава 1А. Пространство-время Лагранжа и пространство-время Минковского как математические абстракции и физическая реальность

Вначале обратимся к четырёхмерному пространству-времени Лагранжа  $\langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle$  и рассмотрим в нём условно тригонометрическую модель кинематики физического движения материальной точки. Как исходную единичную систему координат выберем какой-либо универсальный базис  $\tilde{E}_1 = \{\vec{I}\}$ . В нём, по определению (в данном случае), все четыре координатные оси ( $x_1, x_2, x_3, \vec{t}$ ) как бы евклидово ортонормированы. Три пространственные оси составляют евклидову пространствуподобную часть базиса  $\tilde{E}^{(3)}$  (то есть декартов суббазис). Стрела времени  $\vec{t}$  есть одномерная направленная времениподобная аффинная составляющая базиса. При допустимых преобразованиях базиса пространственные оси ( $x_1, x_2, x_3$ ) всегда ортонормированы и образуют в  $\tilde{E}^{(3)}$  правую тройку. Поэтому в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  действует трёхмерная сферическая тригонометрия с безразмерными функциями. Отношение между тремя пространственными координатами и стрелой времени характеризует направленный вектор тангенса, тождественный вектору скорости материальной точки с соответствующей размерностью:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mathbf{x}/\mathbf{t} \equiv \mathbf{v}, \quad \operatorname{tg} \alpha_k = x_k/\mathbf{t} \equiv v_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1A)$$

Допустимые линейные преобразования в пространстве-времени Лагранжа образуют группу однородных преобразований Галилея  $\langle V_G \rangle$ . Это математически обуславливает принцип относительности Галилея. (Условие их непрерывности  $\det V_G = +1$  обеспечивает сохранение ориентации базиса.) В конкретном декартово-аффинном базисе пространство-время Лагранжа может рассматриваться как линейное. В частности, в каком-либо  $\tilde{E}$  оно представляется прямой суммой

$$\langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oplus \vec{t} \equiv \text{CONST}, \quad (2A)$$

где, в свою очередь,

$$\langle \mathcal{E}^3 \rangle \equiv \text{CONST}' + \mathbf{p}, \quad (3A)$$

где  $\mathbf{p}$  – произвольный вектор параллельного переноса. (Тут в некоторой степени имеется аналогия с бинарными пространствами из гл. 11, отображающая здесь “параболическую” геометрию Клейна [26, 50]).

В векторной трактовке стрелы времени составляют полное множество осей  $\langle \tilde{\mathbf{t}} \rangle$ , включающее только времениподобные элементы. С другой стороны,  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  включает только пространствуподобные элементы. В данном случае все они вещественные. Преобразования Галилея сохраняют данное статус-кво, вследствие того что они сводятся к трём возможным простейшим типам:

- 1) автоморфная сферическая ротация  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ,
- 2) параллельная ротация  $\tilde{\mathbf{t}}$  относительно евклидова подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ,
- 3) параллельный перенос  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и  $\tilde{\mathbf{t}}$ .

В общем случае базис линейно преобразуется следующим образом:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline V_G & \\ \hline R & \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \tilde{E}_0 & \\ \hline R_0 & \mathbf{a}_0 \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \tilde{E} & \\ \hline R \cdot R_0 & R\mathbf{a}_0 + \\ & + \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \quad (R \in \langle \text{rot } \Theta_{3 \times 3} \rangle). \quad (4A)$$

Первые 3 столбца матрицы базиса задают постоянное  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , 4-й столбец задаёт переменную стрелу времени  $\tilde{\mathbf{t}}$ . При  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0} : \tilde{E}_0 \in \langle \tilde{E}_{lu} \rangle$  (универсальный базис). При этом, если  $R_0 = I$ , то  $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 = \{I\}$ . Тогда обратная матрица  $V_G^{-1}$  (с той же структурой) приводит какой-либо бинарный декартово-аффинный базис к простейшей единичной форме, то есть к исходному базису. Кроме того, она осуществляет пассивное модальное преобразование координат линейного элемента из  $\tilde{E}_1$  в  $\tilde{E}$ . В любом бинарном базисе  $\tilde{E}$  линейный элемент пространства представляется прямой суммой:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}.$$

Исходя из вышеизложенного однородные преобразования Галилея в тригонометрической форме представляются как произведение автоморфной сферической и параллельной ротаций:

$$V_G = F(\Theta, \operatorname{tg} \alpha) \quad f(\operatorname{tg} \alpha) \quad \text{rot } \Theta \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \operatorname{tg} \alpha \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{3 \times 3} & \operatorname{tg} \alpha \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} = \text{rot } \Theta \cdot f(\operatorname{tg} \bar{\alpha}), \quad (5A)$$

где  $\det V_G = \det f(\operatorname{tg} \alpha) = \det \text{rot } \Theta = +1$ ;  $\operatorname{tg} \bar{\alpha} = \text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

Обратное однородное преобразование Галилея представляется в виде:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline V_G^{-1} & \text{rot}(-\Theta) & f(-\operatorname{tg} \alpha) \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) & \cdot \operatorname{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot \\ & \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline I_{3 \times 3} & -\operatorname{tg} \alpha \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} = f(-\operatorname{tg} \alpha) \cdot \text{rot}(-\Theta). \quad (6A) \\ \hline \end{array}$$

Формула (5А) является аналогом полярного представления (474), (475). Сам базис преобразуется аналогично (480):

$$\tilde{\mathbf{E}} = V_G \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = f(\operatorname{tg} \alpha) \cdot \text{rot} \Theta \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = f(\operatorname{tg} \alpha) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{1u}. \quad (7A)$$

С физической точки зрения суббазис  $\tilde{\mathbf{E}}^{(3)}$  движется относительно суббазиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  со скоростью  $v$ . Матрица (6А) преобразует координаты элемента пространства-времени Лагранжа следующим образом:

$$\mathbf{u} = V_G^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = F^{-1}(\Theta, \operatorname{tg} \alpha) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \boxed{\frac{\text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \operatorname{tg} \alpha \cdot t)}{t}}. \quad (8A)$$

Если  $\Theta = Z$ , то имеем чисто параллельные ротации, выраженные в условно тригонометрической форме:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} - \operatorname{tg} \alpha \cdot t = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{v} \cdot t, \\ t = t^{(1)}. \end{array} \right\} \quad (9A)$$

Заметим, что параллельная ротация, применяемая здесь для стрелы времени, геометрически промежуточна между сферической и гиперболической ротациями. Такой вид ротации обусловлен тем, что скалярное время является её инвариантом и, в принципе, может отсчитываться только на исходной оси  $\vec{t}^{(1)}$ . *Многоступенчатые параллельные ротации дают нерелятивистский коммутативный закон сложения тангенсов или скоростей в матричной и векторной формах в евклидовом подпространстве (3А):*

$$\left. \begin{array}{l} f(\operatorname{tg} \alpha_{12}) \cdot f(\operatorname{tg} \alpha_{23}) = f(\operatorname{tg} \alpha_{23}) \cdot f(\operatorname{tg} \alpha_{12}) = f(\operatorname{tg} \alpha_{12} + \operatorname{tg} \alpha_{23}), \\ \prod f(\operatorname{tg} \alpha_{ij}) = f(\sum \operatorname{tg} \alpha_{ij}). \end{array} \right\} \quad (10A)$$

Множество  $\langle f(\operatorname{tg} \alpha) \rangle$  – кинематическая коммутативная подгруппа группы Галилея.

Пространство-время Лагранжа однородно в силу равнозначности всех его составляющих точечных элементов. (Выбор какого-либо элемента за начало координат никак не влияет на характер допустимых преобразований.)

Если же его рассматривать иерархически более сложно, а именно как четырёхмерное векторное пространство, то тогда, согласно (2A), оно распадается на две составляющие: изотропное неориентированное евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и ориентированное подпространство  $\langle \vec{t} \rangle$ . Последнее ориентировано по собственной стреле времени всегда из прошлого в будущее. В целом оно неизотропно в силу хотя бы того, что временная и пространственные координаты его элементов имеют различные размерности. Отсюда вытекает аффинный характер их взаимоотношений и условность тождества (1A).

Пространство-время Лагранжа широко применяется в классической нерелятивистской физике. Однако ещё в конце XIX века выяснилось, что излагаемые в нём уравнения электродинамики Максвелла при переходе от одной инерциальной системы Галилея к другой изменяют свою форму. В связи с этим Лоренц (1892г.) предложил специальные преобразования координат пространства и времени, устраниющие этот существенный недостаток. (Ещё ранее в 1877г. их установил Фойт исходя из упругой теории света.) В 1904г. Лоренц с учётом *физического принципа относительности Планка* (для всех физических явлений) показал, что эти преобразования непосредственно следуют из условия форминвариантности волнового уравнения [34]. Последнее, согласно теории Максвелла, объясняет и описывает распространение света.

\* \* \*

Далее обратимся к пространству-времени Минковского. В ходе произошедшей в начале XX века революционной трансформации пространства-времени в его более совершенную – релятивистскую концепцию в СТО с математической точки зрения были введены два принципиально новых постулата.

*Постулат №1* устанавливает, что реальное пространство-время изотропно (наряду с его однородностью). Это достигается использованием для временной координаты некоторого постоянного масштабного коэффициента « $c$ », имеющего размерность скорости.

*Постулат №2* устанавливает, что реальное пространство-время представляется как ориентированное бинарное комплексное квазиевклидово пространство с индексом  $q = 1$ . Его мнимая координата  $i\vec{ct}$  – стрела времени, направленная из прошлого в будущее.

Принятие этих двух постулатов позволило в новой концепции полностью уйти от вышеотмеченных недостатков нерелятивистского пространства-времени. Например, согласно первому постулату, в (8A):

$$\left. \begin{aligned} t &\Rightarrow ct, \\ \operatorname{tg} \alpha &\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_R = v/c. \end{aligned} \right\} \quad (11A)$$

Это даёт безразмерную, чисто тригонометрическую форму описания физического движения. В свою очередь, второй постулат сводит описание движения к гиперболической (псевдосферической) тригонометрии. Причём в базисе  $\tilde{E}_1$  естественным образом реализуется сферическо-гиперболическая аналогия абстрактного и конкретного типа (гл. 6):

$$\left. \begin{array}{l} t \mapsto i \operatorname{ct}, \\ \operatorname{tg} \varphi = -x/i \operatorname{ct} = i \cdot v/c = \operatorname{tg}(i\gamma) = i \operatorname{th} \gamma. \end{array} \right\} \quad (12A)$$

Здесь или  $\varphi = i\gamma$ , что соответствует (323), или  $\operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma$ , что соответствует (354).

Переход к новой концепции формально осуществляется в два этапа: сначала к пространству  $\langle E^{3+1} \rangle$ , затем к его вещественному изоморфизму  $\langle P^{3+1} \rangle$  с вводом метрического тензора  $I^\oplus$ . Таким образом, пространство-время Лагранжа преобразуется в пространство-время Минковского. Преобразования Галилея автоматически заменяются на преобразования Лоренца. Евклидово векторное пространство тангенсов или скоростей преобразуется в гиперболическое векторное пространство – модель Клейна внутри абсолюта (§ 12.1).

Эта революционная трансформация концепции пространства-времени, как известно, была последовательно осуществлена 100-летие назад в классических трудах создателей СТО: Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна и Минковского [34, 36, 39, 48]. Причём в работах Пуанкаре и Минковского был реализован вышеуказанный фундаментальный математический подход к проблеме. (Приоритет в главном безусловно принадлежит Пуанкаре [66].) Но ввиду приложения новой теории к физике принцип относительности трактуется до сих пор почему-то только в физическом смысле. Хотя, как было показано в § 12.3, он имеет свой математический эквивалент. Любое пространство-время, прежде всего, есть некая математическая абстракция, используемая в тех или иных координатных формах записи объективных законов движения материи. В *координатной трактовке этих законов* и проявляется подлинная физическая реальность пространства-времени.

Пространство-время Минковского в целом однородно. Если же его рассматривают иерархически более сложно – с учётом допустимых направлений, а именно как четырёхмерное векторное пространство, то тогда по отношению к псевдоевклидовой метрике оно распадается на три изотропные составляющие: множество элементов вне светового конуса  $\langle E^3 \rangle^{(k)}$ , множество элементов внутри светового конуса  $\langle ct \rangle^{(k)}$  и множество элементов на конусе. Соответственно первое множество включает пространствуподобные (вещественные)

элементы, второе множество включает времениподобные (мнимые) элементы, а конус включает элементы с нулевой метрикой. В силу того что эти составляющие изотропны, линейные преобразования в нём, связанные с ротациями и деформациями, описываются четырёхмерными тензорными тригонометрическими моделями. Впервые тригонометрические функции в псевдосферической форме в  $\langle \mathcal{E}^{1+1} \rangle$  применил Пуанкаре [39]. Впоследствии Минковский [36] аналогично использовал тригонометрические гиперболические функции в  $\langle P^{1+1} \rangle$ . Скалярная тригонометрия привлекалась ими для моделирования *ротационных* гиперболических преобразований на псевдоплоскости.

Тензорные тригонометрические модели преобразований в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , изложенные уже частично в § 6.3 и § 12.2, позволяют придать чисто тригонометрическую четырёхмерную тензорную форму кинематике СТО. Исходные *постулаты и следствия из них*, фигурирующие в физической трактовке СТО, имеют изоморфные тригонометрические прототипы (*физико-математический изоморфизм*).

Однородным непрерывным преобразованиям Лоренца соответствуют псевдоевклидовы тригонометрические ротации. Эйнштейнову замедлению времени соответствуют тригонометрические гиперболические ротации с псевдоевклидовым инвариантом:  $1 = ch^2 \gamma - sh^2 \gamma$ , где  $ch \gamma > 1$ . Лоренцеву сокращению протяжённости соответствуют тригонометрические гиперболические деформации с перекрёстным квазиеуклидовым инвариантом:  $1 = sch^2 \gamma + th^2 \gamma$ , где  $sch \gamma < 1$ . При рассмотрении этих двух явлений на псевдоплоскости, соответствующей углу  $\Gamma$ , в обоих случаях формально осуществляется решение гиперболически прямоугольного треугольника (§ 6.4). Специальному *физическому* принципу относительности Пуанкаре соответствует специальный *математический* принцип относительности применительно к  $\langle P^{3+1} \rangle$  (§ 12.3). Закон Пуанкаре – Эйнштейна о взаимозависимости пространства и времени и об их относительности объясняется тем, что одноиндексные евклидово подпространство и релятивистская стрела времени всегда являются гиперболически ортогональными дополнениями друг к другу, изменяясь только вместе при гиперболических ротациях:

$$\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oslash \tilde{ct} \equiv \text{CONST}. \quad (13A)$$

Это пространство-время есть единый четырёхмерный геометрический континуум.

Постулат Эйнштейна о максимуме и постоянстве скорости света в любых галилеевски инерциальных системах отсчёта непосредственно трактуется как факты псевдоевклидовой тригонометрии:

$$\|\mathbf{v}\|/c = \|\mathbf{th} \gamma\| < 1, \quad (14A)$$

$$\infty \pm \gamma = \infty. \quad (\text{в любой псевдодекартовой системе координат}) \quad (15A)$$

Релятивистские законы сложения физических скоростей определяются законами суммирования гиперболических ротаций (485), (491). Так, последние в виде законов сложения гиперболических отрезков (гл.7А) трактуют и независимость скорости света от движения его источника.

Аналогичные тригонометрические интерпретации имеют место для ряда специальных релятивистских эффектов, относящихся первично ко времени и евклидову подпространству и обусловленных гиперболическим характером их совместных преобразований. То, что масштабный коэффициент, принятый впервые Пуанкаре для координат времени, равен скорости света в вакууме, следует в результате изложения электродинамики Максвелла – Лоренца или волновой квантовой механики Шрёдингера – Дирака в  $\langle E^{3+1} \rangle$  или в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в ковариантной релятивистской форме.

Выберем в качестве исходного единичного базиса  $\tilde{E}_1 = \{\Gamma\}$ , в котором пространствуподобная составляющая  $\tilde{E}_1^{(3)}$  находится в состоянии покоя относительно наблюдателя  $N_1$ . Наблюдатель имеет собственный хронометр и априори инерциален. С ним связано *полное множество универсальных базисов* относительно  $N_1$ , определяемое условиями:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{E}_{1u} = \text{rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{rot } \Theta\}, \\ \text{rot}' \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Theta = I^{\oplus} = \text{rot } \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot}' \Theta; \end{array} \right\} \quad (16A)$$

где рефлектор-тензор имеет вид

$$I^{\oplus} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (17A)$$

В базисе  $\tilde{E}_1$  и в других универсальных базисах явления описываются с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя  $N_1$ . В них все координатные оси изначально совместно евклидово и псевдоевклидово ортонормированы. Напротив, прочие базисы ортонормированы только псевдоевклидово, а именно следующим образом:

$$\tilde{E}' \cdot I^{\oplus} \cdot \tilde{E} = I^{\oplus} = (\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \tilde{E})' \cdot (\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \tilde{E}), \quad (18A)$$

где  $\sqrt{I^{\oplus}}$  – арифметический квадратный корень типа (443). Это соотношение также означает, что для бинарного декартона базиса в  $\langle E^{3+1} \rangle$

все пространственные оси с мнимой четвёртой координатой всегда сферически ортонормированы, а временная ось с мнимой четвёртой координатой всегда сферически антиортонормирована.

В декартовой графике псевдоевклидовы базисы отображаются в четырёхмерном евклидовом пространстве в координатах исходного единичного базиса  $\tilde{E}_1$ . Последний как универсальный базис является декартовым. Выраженные в нём вектор-столбцы матриц новых базисов определяют расположение координатных осей, сферические углы между ними и евклидовы масштабы по осям.

Базис  $\tilde{E}_{1u}$ , согласно (16А), смещён относительно  $\tilde{E}_1$  на сферический тензорный угол  $\Theta$ . Ротация на угол  $\Theta$  элементарна и осуществляется в некоторой плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Евклидово подпространство и стрела времени остаются теми же, что и в  $\tilde{E}_1$ .

Пусть новый базис получается чисто гиперболической ротацией  $\tilde{E}_{1h} = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{roth } \Gamma\}$ . (19А)

Тогда новые координатные оси, согласно (363), полно сферически не ортогональны друг другу и имеют масштабные искажения в евклидовой метрике (хотя бы две из них, включая стрелу времени). Новая единица времени растянута с коэффициентом  $q_4 = \sqrt{\text{ch}^2 \gamma + \text{sh}^2 \gamma} = \sqrt{\text{ch} 2\gamma}$ . Новые единицы пространственных осей растянуты с коэффициентами  $q_k = \sqrt{\text{ch} 2\gamma \cdot \cos^2 \alpha_k + \sin^2 \alpha_k}$ . Новые сферические углы между осями (в интервале  $0 < \beta < \pi$ ) определяются по их косинусам:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_{kj} &= 2 \text{sh}^2 \gamma \cdot \cos \alpha_k \cdot \cos \alpha_j / q_k \cdot q_j, \\ \cos \beta_{k4} &= \text{sh} 2\gamma / q_k \cdot q_4. \end{aligned} \right\}$$

Если  $\cos \alpha_3 = 0$ , то  $\cos \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1$  и искажается только угол между  $x_1$  и  $x_2$ . Если  $\cos \alpha_3 = \cos \alpha_2 = 0$ , то  $\cos \alpha_1 = \pm 1$  и углы между пространственными осями остаются прямыми (двумерный классический вариант Лоренца). В общем случае новый базис, согласно полярному представлению (480), получается последовательно сферической и гиперболической ротациями в элементарной форме:

$$\tilde{E} = \text{roth } \Gamma \cdot \text{rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_{1u}. (20А)$$

(Здесь все матрицы согласованы с рефлектор-тензором.)

Чисто гиперболическая ротация базиса (19А) физически соответствует равномерному прямолинейному (поступательному) движению суббазиса  $\tilde{E}_{1h}^{(3)}$  относительно суббазиса  $\tilde{E}_1^{(3)}$  со скоростью  $v = c \cdot \text{th } \gamma$ . Гиперболическая ротация элементарна и осуществляется в псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle \subset \langle P^{3+1} \rangle$ , задаваемой стрелой времени  $\tilde{c}t^{(1)}$  и направлением вектора тангенса  $\text{th } \gamma$  или вектора скорости  $v$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ .

В двумерном варианте имеем:

$$\tilde{E}_{II} = \{\text{roth } \Gamma\}^{2 \times 2} \cdot \tilde{E}_I = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma & \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \\ \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha & \text{ch } \gamma \end{vmatrix} \quad (\cos \alpha = \pm 1). \quad (21A)$$

Графически это преобразование сводится к гиперболической ротации обеих осей  $x^{(1)}$  и  $\tilde{ct}^{(1)}$  на угол  $\gamma$  (в сторону биссектрисы первого квадранта при  $\cos \alpha = +1$  и в обратную сторону при  $\cos \alpha = -1$ ). Физически это преобразование сводится к движению оси  $x^{(2)}$  вдоль оси  $x^{(1)}$  со скоростью  $v$  (в направлении оси  $x^{(1)}$  при  $\cos \alpha = +1$  и в обратную сторону при  $\cos \alpha = -1$ ).

Пусть некоторая материальная точка движется (физически) равномерно и прямолинейно так, что в нулевой момент времени  $t = 0$  она проходит через начало координат  $O$  (общее для всех одноцентровых базисов  $\tilde{E}$ ). Тогда её мировая линия есть центральная прямая внутри изотропного конуса [36]. Сам изотропный конус – геометрическое место всех центральных световых мировых линий. Какой-то псевдодекартов базис  $\tilde{E}$ , в котором вышеуказанная материальная точка физически неподвижна, имеет стрелу времени  $\tilde{ct}$ , совпадающую с её прямой мировой линией. (Вообще же, все новые координатные оси задаются вектор-столбцами матрицы нового базиса  $\tilde{E}$ .) Данная прямая мировая линия или она же – новая стрела времени  $\tilde{ct}$  взаимно-однозначно определяется в  $\tilde{E}_I$  углом  $\gamma$  и направляющими косинусами вектора  $\mathbf{th } \gamma \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  или также взаимно-однозначно определяется ротационной матрицей  $\text{roth } \Gamma$  с канонической структурой (363).

Заметим, что во всех формулах и законах, связанных с описанием материальных явлений во времени (процессов), как известно,  $\Delta t > 0$  ( $dt > 0$ ). Соответственно и гиперболический угол движения в любом псевдодекартовом базисе может только увеличиваться ( $d\gamma > 0$ ). Это выражает общий принцип возможности физического движения только из прошлого в будущее, то есть по мгновенной стреле собственного времени. Он же тождествен *принципу детерминизма* для материальных явлений. В СТО этот принцип не противоречит тому, что материальные объекты, имеющие одни и те же начальную и конечную мировые точки, но различные мировые линии между ними, затрачивают в общем случае различное собственное время на всё путешествие, то есть время по собственным хронометрам (“парадокс близнецов”). Следовательно, в тригонометрической форме кинематики теории относительности при активных преобразованиях координат в тензоре движения (21A) перед углами  $\Gamma$  и  $\gamma$  применяется только знак «+». (Отрицательный знак перед данными углами возможен только при *мысленных* движениях в прошлое, когда применяется *антитподная* гиперболическая геометрия – § 12.1.)

Это в определённой степени отличает гиперболическую кинематику СТО от правил движения в геометрии Лобачевского – Больяи.

Одна и та же стрела времени  $\vec{ct}$  или прямая мировая линия как в верхней, так и в нижней полости изотропного конуса определяется одной и той же матрицей  $roth \Gamma$ . Это физически соответствует одному и тому же вектору скорости, а геометрически выражается как движение:

$$roth \Gamma = F(\gamma, e_\alpha) \equiv F(-\gamma, -e_\alpha). \quad (22A)$$

(Последнее выражение дано для антиподной гиперболической геометрии.) С другой стороны, симметричная ей относительно  $\vec{ct}^{(1)}$  стрела времени или прямая мировая линия определяется обратной матрицей. Это физически соответствует аддитивно противоположному вектору скорости, а геометрически выражается как движение:

$$roth^{-1} \Gamma = F(\gamma, -e_\alpha) = roth(-\Gamma) \equiv F(-\gamma, e_\alpha). \quad (23A)$$

(Последнее выражение дано для антиподной гиперболической геометрии.) Обратим внимание на то, что в обоих равенствах формально значение  $\gamma$  положительно для направления *материального* движения по стреле времени и отрицательно для направления *мысленного* движения против стрелы времени (то есть в данном случае реперной оси для отсчёта угла ротации). Из (21A) следует, что в  $\langle P^{1+1} \rangle$  координатная скорость физического движения в  $\langle E^3 \rangle$  выражается тригонометрическим способом через соотношение:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} = \frac{x}{ct} = \frac{\operatorname{sh} \gamma \cdot \cos \alpha}{\operatorname{ch} \gamma} = \operatorname{th} \gamma \cdot \cos \alpha, \quad (24A)$$

где  $\cos \alpha = \pm 1$ . В самом же общем случае вектор скорости характеризуется модулем  $\|\mathbf{v}\|$  и направляющими косинусами:  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$  и  $\cos \alpha_3$ . Его три ортодекомпозиции в тригонометрической форме имеют вид:

$$\frac{v_k}{c} = \frac{\Delta x_k}{c \cdot \Delta t} = \frac{x_k}{ct} = \operatorname{th} \gamma \cdot \cos \alpha_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (25A)$$

где  $-1 \leq \cos \alpha_k \leq +1$ ;  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ .

При описании физического движения со скоростью  $v$  в псевдо-плоскости ротации  $\langle P^{1+1} \rangle$  в координатах  $\langle x^{(1)}, \vec{ct}^{(1)} \rangle$  новые координатные оси  $x$  и  $\vec{ct}$  отклоняются на один и тот же гиперболический угол  $\gamma = \operatorname{Arth} v/c$ . В универсальном базисе имеет место сферическая-гиперболическая аналогия конкретного типа (гл. 6), например тангенс-тангенсная или синус-тангенсная:

$$x^{(1)}/ct^{(1)} = \operatorname{th} \gamma \equiv \operatorname{tg} \varphi_R \equiv \sin \varphi = v/c \quad (\cos \alpha = +1).$$

То есть при указанной формализации простых физических движений относительно неподвижного наблюдателя, в принципе, безразлично какую тригонометрию применять для описания – гиперболическую или сферическую. Но при формализации комбинированных физических движений, например, таковых относительно подвижного наблюдателя, многоступенчатых и интегральных движений применяется только первая. То же относится к основным движениям в гиперболической геометрии – простым и многоступенчатым.

Так, например, *сферический угол параллельности Лобачевского*  $\Pi(a/R)$  [21, с. 186], широко используемый в гиперболической неевклидовой геометрии как угловой аргумент, имеет геометрический смысл исключительно в универсальном базисе и для простых движений в отличие от гиперболического угла-аргумента  $\gamma = a/R$ , определяемого корректно внешним образом в любом псевдодекартовом базисе:

$$\left. \begin{aligned} \Pi(\gamma) &= \pi/2 - \varphi(\gamma) = \pi/2 - \arcsin(\operatorname{th} \gamma) = 2 \operatorname{arctg} [\exp(-\gamma)], \\ d\Pi(\gamma) &= -\sec \gamma d\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (26A)$$

где  $\sin \varphi \equiv \operatorname{th} \gamma \leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi/2 \equiv \operatorname{th} \gamma/2$ , согласно (331), (356). При движении по геодезической (гиперболе) из центра гиперболоида  $\Pi$  угол параллельности Лобачевского, выраженный в универсальном базисе, уменьшается от  $\pi/2$  до  $\Pi(\gamma)$ .

В заключение данной вводной главы отметим, что изначальный *математический подход* Пуанкаре [39] является исчерпывающим для логически безупречного построения СТО. С другой стороны, изначальный *физический подход* Эйнштейна [48] к этому на основе известных двух постулатов таким свойством не обладает (см. о том же в работе [32, с. 42 – 44]) – равно как только из экстремума  $\operatorname{th} \gamma_{\max} = 1$  в любых системах отсчёта и математического принципа относительности невозможно построить гиперболическую тригонометрию. Исходя только из последних двух положений (эквивалентных постулатам Эйнштейна), в принципе, можно построить логически безупречным образом бесконечное множество тригонометрий (геометрий постоянного радиуса  $R$ ) и их квазифизических изоморфизмов с псевдогёльдеровой (неквадратичной при  $p \neq 2$ ) метрикой:

$$|da|^p = |dx_1|^p + |dx_2|^p + |dx_3|^p - |dx_4|^p \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Задание именно псевдоевклидовой метрики ( $p = 2$ ) было осуществлено Эйнштейном неявным образом при *аксиоматическом* определении им же понятия одновременности. (Определение одновременности по Эйнштейну есть теорема геометрии Минковского – см. в гл. 4А.)

## Глава 2А. Тензорная тригонометрическая модель однородных преобразований Лоренца

В пространстве-времени Минковского исходные и новые координаты мировой точки в инерциальных системах  $\tilde{E}_I$  и  $\tilde{E}_{II}$ , согласно (21A), или в четырёхмерной форме как в  $\tilde{E}_I$  и  $\tilde{E}$  в той же псевдоплоскости ротации связаны пассивным модальным ротационным преобразованием гиперболического типа:

$$\text{roth}(-\Gamma) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 0 & 0 & -\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha & 0 & 0 & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{u}\{\tilde{E}_I\} \\ \hline x_1^{(1)} \\ \hline x_2^{(1)} \\ \hline x_3^{(1)} \\ \hline x_4^{(1)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot x_1^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \text{ct}^{(1)} \\ \hline x_2^{(1)} \\ \hline x_3^{(1)} \\ \hline \text{ch } \gamma \cdot \text{ct}^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)} \\ \hline \end{array};$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \text{ch } \gamma \cdot x_1^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \text{ct}^{(1)} = [x_1^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \text{ct}^{(1)}] / \text{sch } \gamma, \\ x_2 = x_2^{(1)}, \quad x_3 = x_3^{(1)}; \\ \text{ct} = \text{ch } \gamma \cdot \text{ct}^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)} = [\text{ct}^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)}] / \text{sch } \gamma. \end{array} \right\} \quad (27A)$$

(Тригонометрические однородные преобразования координат пространства и времени Пуанкаре – Минковского.) Здесь дополнительно используется множитель  $\cos \alpha = \pm 1$ , определяющий направление вектора тангенса. С учётом (24A) они же приобретают физическую форму однородных преобразований координат Лоренца [34]:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = [x_1^{(1)} - v \cdot t^{(1)}] / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \\ x_2 = x_2^{(1)}, \quad x_3 = x_3^{(1)}; \\ \text{ct} = [\text{ct}^{(1)} - v/c \cdot x_1^{(1)}] / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{array} \right\}$$

Используя гиперболическую ротационную модальную матрицу с общей канонической структурой (363) в  $\tilde{E}_I$ , получаем генеральные тригонометрические преобразования координат в четырёхмерной форме ( $k = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{cases} x_k = \cos \alpha_k \cdot [ch \gamma \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)}) - sh \gamma \cdot ct^{(1)}] + \\ + [x_k^{(1)} - \cos \alpha_k \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)})], \\ ct = ch \gamma \cdot ct^{(1)} - sh \gamma \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)}). \end{cases} \quad (28A)$$

Те же тригонометрические преобразования в векторной форме:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [ch \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)} - sh \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot ct^{(1)}] + (I - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha') \cdot \mathbf{x}^{(1)} = \\ = [\overleftarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha'} \cdot \mathbf{x}^{(1)} - th \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot ct^{(1)}] / sch \gamma + \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha'} \cdot \mathbf{x}^{(1)}, \\ ct = ch \gamma \cdot ct^{(1)} - sh \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)} = [ct^{(1)} - th \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)}] / sch \gamma, \end{cases} \quad (29A)$$

где  $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  – вектор направляющих косинусов скорости движения или вектора тангенса;

$$\overleftarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha'} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' = \overleftrightarrow{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \mathbf{v}' / \|\mathbf{v}\|^2;$$

$$I - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' = \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha'} = \overleftrightarrow{\mathbf{v}} = \text{ортопроекторы } (\S 2.5) \text{ на } \langle \text{im } \mathbf{v} \rangle \text{ и } \langle \text{im } \mathbf{v} \rangle^\perp.$$

Генеральные тригонометрические преобразования координат (29A), если использовать сравнение с (27A), трактуются так. Во первых, пространственная проекция  $\mathbf{x}^{(1)}$  в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  представляется прямой суммой из релятивистской и нерелятивистской составляющей – параллельной и сферически ортогональной вектору  $\mathbf{v} \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Во вторых, при гиперболической ротации базиса  $\tilde{E}_1$  в псевдоплоскости  $\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{ct}^{(1)} \rangle$  пассивному модальному преобразованию подвергаются только временная проекция  $ct^{(1)}$  и релятивистская составляющая пространственной проекции  $\overleftarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha'} \cdot \mathbf{x}^{(1)}$ . Ортогональная составляющая  $\overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha'} \cdot \mathbf{x}^{(1)}$  есть инвариант преобразований Лоренца и Галилея. Далее,

$$\|\overrightarrow{\mathbf{th}} \gamma\| = \overrightarrow{\mathbf{th}} \gamma = \|\mathbf{v}\|/c = + \sqrt{\overrightarrow{\mathbf{th}}^2 \gamma_1 + \overrightarrow{\mathbf{th}}^2 \gamma_2 + \overrightarrow{\mathbf{th}}^2 \gamma_3}$$

(при физическом движении  $\gamma > 0$ ),

$$\overrightarrow{\mathbf{th}} \gamma_k = \cos \alpha_k \cdot \overrightarrow{\mathbf{th}} \gamma = v_k/c \quad (\overrightarrow{\mathbf{th}} \gamma = \overrightarrow{\mathbf{th}} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha), \quad (30A)$$

где  $\gamma_k$  – частный гиперболический угол между  $\overrightarrow{ct}^{(1)}$  и проекцией  $\overrightarrow{ct}$  на координатную псевдоплоскость  $\langle x_k^{(1)}, \overrightarrow{ct}^{(1)} \rangle$ . Заметим тут же, что любые тензоры с нулевой четвёртой координатой в псевдодекартовых базисах в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , в том числе векторы тангенса и скорости физического движения, подчиняются формулам евклидовой геометрии в собственном  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ; в частности, их модули и проекции удовлетворяют теореме Пифагора. Аналогичные генеральные преобразования координат пространства-времени в физической форме имеют вид:

$$\mathbf{x} = [\overleftarrow{\mathbf{e}}_a \overrightarrow{\mathbf{e}}_a' \cdot \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^{(1)}] / \sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2} + \overrightarrow{\mathbf{e}}_a \overleftarrow{\mathbf{e}}_a' \cdot \mathbf{x}^{(1)},$$

$$ct = [ct^{(1)} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}^{(1)}/c] / \sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2}.$$

Преобразования координат в четырёхмерной физической форме вывел Герглотц [57; 37, с. 27], используя разложение  $\mathbf{x}^{(1)}$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  на релятивистскую и нерелятивистскую ортопроекции (*принцип Герглотца*).

Во всех вышеуказанных преобразованиях координат мировой точки применяется два вида базиса:  $\tilde{E}_1 = \{\Pi\}$  и  $\tilde{E} = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{roth } \Gamma\}$ . Первый из них входит во множество универсальных базисов (16А). Понятие *универсальный базис*, очевидно, относительно. Оно привязано к конкретному наблюдателю, например, к  $N_1$  в системе  $\tilde{E}_1$ . Напомним, что именно в  $\tilde{E}_1$ , как правило, выражаются матрицы других псевдодекартовых базисов. Концепция универсального базиса позволяет установить отношение наблюдателя  $N_1$  к любому другому псевдодекартовому базису  $\tilde{E}_i = T_{ii} \cdot \tilde{E}_1$ . При этом возможны 3 варианта:

- 1)  $T_{ii}' \cdot T_{ii} = I \rightarrow \tilde{E}_i \in \langle \text{rot } \Theta \rangle$  – другой универсальный базис, то есть с тем же наблюдателем  $N_1$ ;
- 2)  $T_{ii} = T_{ii}' \rightarrow \tilde{E}_i \in \langle \text{roth } \Gamma \rangle$  – гиперболически связанный базис с наблюдателем  $N_1$ ;
- 3)  $T_{ii} = \text{roth } \Gamma_{ii} \cdot \text{rot } \Theta_{ii} \rightarrow \tilde{E}_i \in \langle T \rangle$  – общий псевдодекартов базис с наблюдателем  $N_1$ .

В первом варианте суббазис  $\tilde{E}_i^{(3)}$  неподвижен относительно  $N_1$  и сферически сдвигнут относительно суббазиса  $\tilde{E}_1^{(3)}$  на угол  $\Theta_{ii}$ . Во втором варианте  $\tilde{E}_i^{(3)}$  движется со скоростью  $\mathbf{v} = c \cdot \mathbf{th} \gamma$  относительно  $N_1$ . В третьем варианте оба эти движения реализуются формально последовательно. В двух последних вариантах, в принципе, возможно перейти к новому собственному универсальному базису, если выполнить модальное преобразование  $T_{ii}^{-1} \cdot \tilde{E}_i = \{\Pi\}$ . В этом новом единичном базисе относительно неподвижен наблюдатель  $N_1$ . Но тогда и все матрицы других базисов нужно выразить именно в нём.

Специальный физико-математический принцип относительности здесь проявляется в том, что общие формулы преобразований координат в инерциальных системах ковариантны. Применяя формулы многоступенчатых преобразований (485) – (488), получаем:

$$\tilde{E}_j = T_{ij} \cdot \tilde{E}_i, \quad \tilde{E}_k = T_{ik} \cdot \tilde{E}_i = T_{ij} \cdot T_{jk} \cdot \tilde{E}_i = \{ T_{ij} \cdot T_{jk} \cdot T_{ij}^{-1} \} \cdot T_{ij} \cdot \tilde{E}_i;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(j)} &= T_{ij}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)}, \\ \mathbf{u}^{(k)} &= T_{ik}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = T_{jk}^{-1} \cdot T_{ij}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)}, \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{ – в координатах } \tilde{E}_i$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = T_{jk}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(j)} \quad \text{– в координатах } \tilde{E}_j.$$

Отсюда видно, что преобразование  $\mathbf{u}^{(j)} \rightarrow \mathbf{u}^{(k)}$  выражается ковариантно наблюдателями  $N_i$  и  $N_j$  в базисах  $\tilde{E}_i$  и  $\tilde{E}_j$ . В частности,  $\tilde{E}_i = \tilde{E}_1$ ,  $T \in \text{roth } \Gamma$ .

В СТО преобразования Лоренца в *активной форме* трансформируют исходный псевдодекартов базис. В силу однородности и изотропности пространства-времени Минковского они имеют чисто тригонометрическую природу. В скалярной тригонометрии, в зависимости от смысла решаемой задачи, вычисляют проективные характеристики двух принципиально различных видов – либо синусно-косинусные, либо тангенсно-секансные. Аналогично, в тензорной тригонометрии применяются либо ротационные, либо деформационные тригонометрические матрицы. Причём в исходном  $\tilde{E}_1$  они выражены в канонических формах (363), (365). В сокращённой *векторной* форме записи эти матрицы представляются в виде:

$$\begin{array}{c} \text{roth } \Gamma \quad \quad \quad \text{defh } \Gamma \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_a \overrightarrow{\mathbf{e}}_a' + \overrightarrow{\mathbf{e}}_a \overleftarrow{\mathbf{e}}_a' & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a' & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array}} \quad \cdots \quad \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{sch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_a \overrightarrow{\mathbf{e}}_a' + \overrightarrow{\mathbf{e}}_a \overleftarrow{\mathbf{e}}_a' & -\text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_a \\ \hline + \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_a' & \text{sch } \gamma \\ \hline \end{array}} \quad . \end{array} \quad (31A)$$

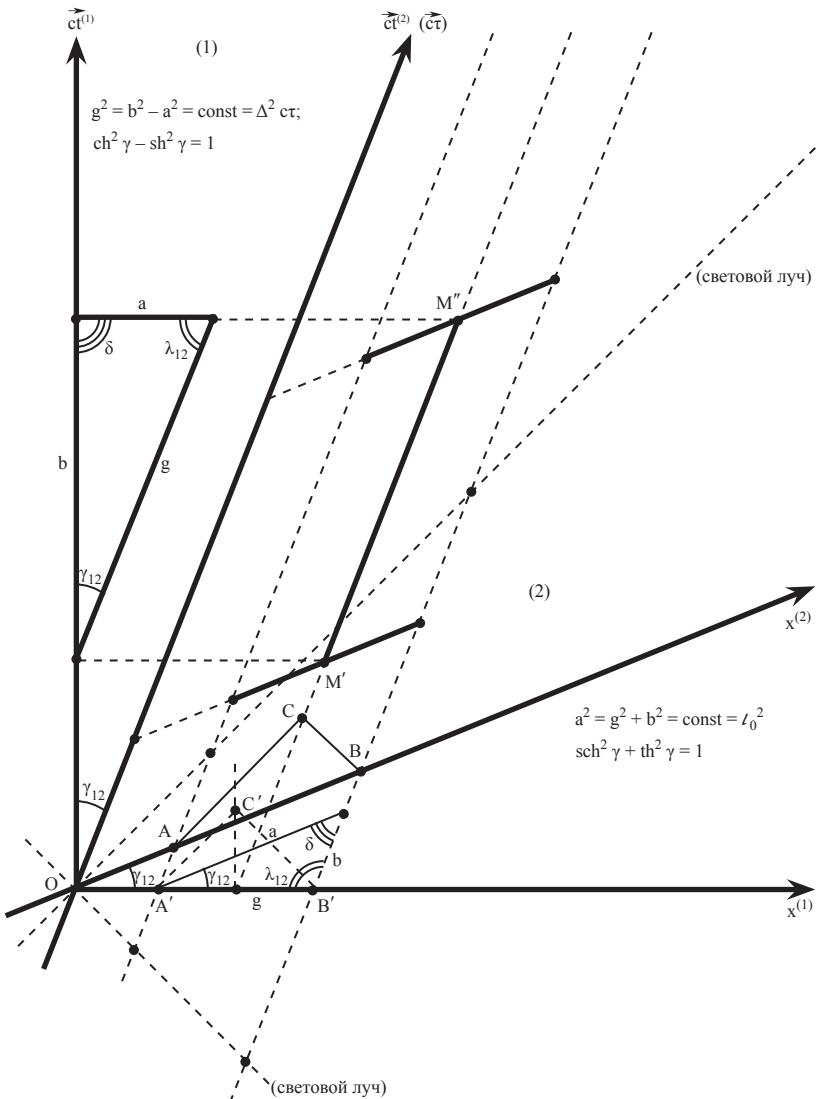
Отметим, что термин *группа преобразований Лоренца* ввёл в научную терминологию (математическую и физическую) именно Пуанкаре в своих изначальных публикациях по теории относительности [39]. Преобразования Лоренца составляют существенную часть выдвинутого им ранее физического принципа относительности, как дальнейшего развития принципа относительности Галилея.

В следующих двух главах рассматривается тригонометрическая трактовка релятивистских эффектов во внутренней и во внешней полостях изотропного конуса.

## **Глава 3А. Эйнштейново замедление времени как следствие ротационного гиперболического преобразования**

Понятие “изотропный световой конус” геометрически связано с мировой линией, так как его *мгновенный центр* есть точка мировой линии. В ней он всегда отделяет прошлое от будущего. Мировые точки укладываются на одну и ту же мировую линию тогда и только тогда, когда все интервалы между ними мнимые, или времениподобные. Во внутренней полости конкретного изотропного конуса описываются мировые линии материальных точек, совершающих равномерное прямолинейное физическое движение, после их прохождения через общее начало координат  $O$  (рис. 1А). Эти линии образуют семейство центральных прямых внутри конуса. В качестве таковой материальной точки для протяжённого объекта выбирают его центр инерции, тождественный центру массы. Материальная точка  $M$  находится в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в состоянии относительного физического покоя в некоторой системе отсчёта  $\tilde{E}_2$  и в состоянии относительного физического движения в  $\tilde{E}_1$  (рис. 1А). Мировая линия точки  $M$  тождественна стреле времени  $\tilde{ct}^{(2)}$  с точностью до параллельного переноса. Пусть оба вышеуказанных базиса связаны гиперболической ротацией:  $\tilde{E}_2 = roth \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1$ .

С точки зрения наблюдателя  $N_1$  материальная точка  $M$  физически движется в  $\langle E^3 \rangle^{(1)}$  со скоростью  $v_{12} = c \cdot th \gamma_{12}$ . В окрестности данной точки может протекать какой-либо процесс. По хронометру наблюдателя  $N_2$  этот процесс длится некоторый интервал времени  $\Delta t^{(2)}$ , определяемый отрезком  $M'M''$  с учётом масштаба по стреле времени  $\tilde{ct}^{(2)}$ . Это, согласно СТО, есть собственное время данного процесса  $\Delta\tau = \Delta t^{(2)}$ , так как оно измеряется относительно неподвижным хронометром. Собственное время в движущемся объекте – абсолютная характеристика, или псевдоевклидов метрический инвариант внутри изотропного конуса. В системе  $\tilde{E}_2$  оно же тождественно координатному времени  $\Delta t^{(2)}$ . Но в системе  $\tilde{E}_1$  координатное время того же процесса, измеряемое наблюдателем  $N_1$ , определяется проекцией отрезка  $M'M''$  на стрелу времени  $\tilde{ct}^{(1)}$  с учётом её масштаба и составляет величину  $\Delta t^{(1)}$  [37, с.109]. Координатное время в движущемся объекте есть относительная характеристика. Например, в системе  $\tilde{E}_1$  оно вычисляется через ротационное модальное преобразование следующим образом:



**Рис. 1А.** Скалярные тригонометрические интерпретации основных релятивистских эффектов внутри и вне изотропного конуса в псевдо-плоскости гиперболической ротации:

(1) – эйнштейново замедление времени в движущемся объекте  
( $g < b$ , или  $\Delta t < \Delta t^{(1)}$ , или  $1 < \text{ch } \gamma$ );

(2) – лоренцево сокращение протяжённости движущегося объекта  
( $g < a$ , или  $\Delta x^{(1)} < \ell_0$ , или  $\text{sh } \gamma < 1$ ).

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)} = \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \Delta \mathbf{u}^{(2)} = \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \Delta \tau \\ \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_2 \cdot \Delta \tau \\ \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_3 \cdot \Delta \tau \\ \text{ch } \gamma_{12} \cdot \Delta \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta \tau \end{pmatrix}^{(1)}, \quad (32A)$$

$$\Delta ct^{(1)} = \text{ch } \gamma_{12} \cdot \Delta \tau > \Delta \tau. \quad (33A)$$

В рассматриваемом частном случае отрезок прямой мировой линии, соответствующий данному процессу, есть линейный тензорный элемент в форме времениподобного 4-вектора  $\Delta \mathbf{u}$ . Его квадратичный псевдоеклидов инвариант выражается в виде:

$$-(\Delta \tau)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta ct)^2 = \text{const}. \quad (34A)$$

Этот инвариант приводится к тригонометрической форме:

$$-1 = (\text{sh}^2 \gamma'_1 + \text{sh}^2 \gamma'_2 + \text{sh}^2 \gamma'_3) - \text{ch}^2 \gamma = \|\mathbf{sh} \gamma\|^2 - \text{ch}^2 \gamma = \text{sh}^2 \gamma - \text{ch}^2 \gamma, \quad (35A)$$

где  $\gamma'_k$  – гиперболический угол между  $\vec{\tau}$  и её ортопроекцией на координатную псевдоплоскость  $(x_k, \vec{ct})$ ;  $\text{sh } \gamma'_k = \cos \alpha_k \cdot \text{sh } \gamma$ . Это есть инвариант преобразований Лоренца для единичного времениподобного линейного элемента. Инвариантное собственное время в каком-либо псевдодекартовом базисе выражается тригонометрически в виде:

$$\Delta \tau = \Delta t / \text{ch } \gamma = \min \langle \Delta t^{(i)} \rangle. \quad (36A)$$

Для криволинейной мировой линии то же, но мгновенное ротационное преобразование применяется к её дифференциальному как к линейному элементу:

$$d\mathbf{u}^{(1)} = \{\text{roth } \Gamma\}^{(m)} d\mathbf{u}^{(m)} = \{\text{roth } \Gamma\}^{(m)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ d\tau \end{pmatrix}^{(1)}. \quad (37A)$$

Элемент  $d\mathbf{u}^{(m)}$  выражен в координатах *мгновенной системы*  $\tilde{E}_m$ , которая на дифференциальном уровне в СТО всегда инерциальна (с точки зрения наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$ ), а их перевод осуществляется в *aприори инерциальную систему*  $\tilde{E}_1$ . В дифференциальной форме

$$d\tau^{(1)} = dt^{(1)} / \text{ch } \gamma = d\tilde{l}/ic = \min \langle dt^{(i)} \rangle. \quad (38A)$$

В результате интегрирования (38А) имеем соотношение  $\Delta\tau = \hat{\Delta l}/ic$ , где  $\Delta \hat{l}$  – псевдоеклидова длина отрезка мировой линии [37, с.110]. Формулы (36А), (38А) выражают тригонометрически релятивистский эффект *эйнштейнова замедления времени процесса в движущемся объекте*. Это происходит с точки зрения наблюдателя  $N_1$  или любого другого инерциального наблюдателя, относительно которого движется данный объект. Указанный эффект, как и другие релятивистские эффекты в СТО, имеет чисто координатную природу. (В свою очередь, природа собственного времени требует отдельного обсуждения, что затрагивается в последней главе.) Отметим, что эффект сокращения времени в движущемся объекте исторически впервые установил Фойгт (1887 г.) и затем независимо от него Лоренц (1892 г.).

Рассматриваемый времениподобный феномен – отрезок мировой линии, согласно (32А) и (37А), в базисе  $\tilde{E}_1$  имеет ещё проекцию на  $\langle E^3 \rangle^{(1)}$  – пространственный путь объекта, выражаемый как через координатное, так и через собственное время:

$$\Delta l^{(1)} = \sqrt{\Delta^2 x_1^{(1)} + \Delta^2 x_2^{(1)} + \Delta^2 x_3^{(1)}} = \operatorname{th} \gamma \cdot \Delta ct^{(1)} = v \cdot \Delta t^{(1)} = \operatorname{sh} \gamma \cdot \Delta ct = v^* \cdot \Delta \tau.$$

Кинематическая характеристика  $v^*$  определяется здесь как *собственная скорость* физического движения

$$v^* = c \cdot \operatorname{sh} \gamma = \frac{dx^{(1)}}{d\tau}; \quad v_k^* = c \cdot \operatorname{sh} \gamma'_k = c \cdot \cos \alpha_k \cdot \operatorname{sh} \gamma. \quad (39A)$$

Все четыре вектора:  $v$ ,  $v^*$ ,  $\operatorname{th} \gamma$  и  $\operatorname{sh} \gamma$  – коллинеарны. Связь между проекциями гиперболического угла  $\gamma_k$  из (30А) и  $\gamma'_k$  из (35А) видна из соотношений:

$$v_k/c = \Delta x_k^{(1)}/\Delta ct^{(1)} = \operatorname{th} \gamma_k = \operatorname{sh} \gamma_k / \operatorname{ch} \gamma_k = \operatorname{sh} \gamma_k' / \operatorname{ch} \gamma.$$

В псевдоплоскости гиперболической ротации рассматриваемая задача сводится к решению плоского “внутреннего” гиперболически прямоугольного треугольника (§ 6.4), в котором  $\Delta ct$  – гипотенуза «g»,  $\Delta l^{(1)}$  – катет «a» и  $\Delta ct^{(1)}$  – катет «b» (см. рис. 1А).

Заметим, что в произведениях (32А), (37А) ротационная гиперболическая матрица действует формально в усечённом виде, а именно только своей нижней строкой. Вызвано это тем, что исходный линейный элемент параллелен собственной стреле времени. Очевидно, что для использования матрицы в полном виде исходный линейный элемент должен образовывать некоторый угол  $\gamma$  со стрелой времени  $\vec{ct}^{(2)}$ . Это может иметь место, например, при анализе двух- и многоступенчатых движений (см. далее в гл. 5А и 7А).

Тем же тригонометрическим способом устанавливается ещё одна существенная теорема СТО и геометрии Минковского. Она формулируется так: “Из всех мировых линий, соединяющих непрерывно точки  $M'$  и  $M''$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , прямолинейный отрезок  $M'M''$  имеет максимально возможную псевдоевклидову длину (или собственное время)”.

$$\hat{\ell} = \int_{t_1^{(2)}}^{t_2^{(2)}} \operatorname{sch} \gamma_{2m} d\operatorname{ct}^{(2)} < \int_{t_1^{(2)}}^{t_2^{(2)}} d\operatorname{ct}^{(2)} = c t_2^{(2)} - c t_1^{(2)}.$$

С другой стороны, минимальная (нулевая) длина таковой непрерывной мировой линии имеет место при соединении точек  $M'$  и  $M''$  световыми отрезками (при условии  $\gamma = +\infty$ ). При этом всегда достаточно двух таких отрезков.

## Глава 4А. Поренцево сокращение протяжённости как следствие деформационного гиперболического преобразования

Во внешней полости изотропного конуса (рис. 1A) рассматриваются совокупности мировых точек, для которых все межточечные интервалы вещественные, или пространствуподобные. Это тождественно тому, что все мировые точки в данной совокупности принадлежат некоторому евклидову подпространству  $\langle E^3 \rangle^{(i)}$ . В соответствующем ему базисе  $\tilde{E}_i$  все эти точки имеют одну и ту же временную координату на стреле времени  $\vec{ct}^{(i)}$ . Этот пространствуподобный феномен есть *мировая фиксация* некоторого геометрического объекта (как множества точек евклидова подпространства) в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Мировая фиксация графическим способом задаёт понятие одновременности множества мировых точек в конкретном базисе  $\tilde{E}_i$  с условием возможности её реализации для них. С другой стороны, все мировые точки из данной совокупности принадлежат своим мировым линиям в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Для геометрического объекта евклидова подпространства, совершающего поступательное физическое движение, мировые линии всех его точек параллельны, что соответствует по направлению собственной стреле времени  $\vec{ct}^{(i)}$ .

Подпространства  $\langle E^3 \rangle^{(i)}$  и  $\vec{ct}^{(i)}$  гиперболически ортогональны тогда и только тогда, когда геометрический объект находится в состоянии физического покоя в первом из них. В этом случае вышеуказанные индексы совпадают, а мировая фиксация объекта определяется как *собственная*.

С математической точки зрения эйнштейново (физическое) определение одновременности, применительно к пространству событий Минковского, является изящной геометрической теоремой в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В двумерной трактовке: “В треугольнике ABC (рис.1A), образованном пространствуподобным отрезком AB и парой встречных световых отрезков AC и BC, медиана и высота, опущенные из вершины C, тождественны”. Следствие: “В вышеуказанном треугольнике ABC основание и медиана принадлежат к двум одноиндексным собственным направлениям данной псевдоплоскости, то есть они гиперболически ортогональны”. В более общей четырёхмерной трактовке: “В конусе, получаемом любым эллиптическим сечением изотропного конуса,

медиана, опущенная из вершины С, и её трёхмерное основание гиперболически ортогональны. И обратно: высота, опущенная из вершины С, есть медиана". Одновременность мировой фиксации как относительное понятие определяется по отношению или к какому-либо  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$  (параллельность ему), или к какой-либо  $\tilde{ct}^{(k)}$  (гиперболическая ортогональность ей).

Собственная мировая фиксация тождественна самому геометрическому объекту в состоянии физического покоя. Произвольная мировая фиксация, по определению, есть одновременный срез мировой траектории геометрического объекта в некотором заданном псевдодекартовом базисе  $\tilde{E}_i$ . Если геометрический объект физически покоится в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ , его мировая траектория в пространстве Минковского параллельна стреле времени  $\tilde{ct}^{(j)}$ . Тогда нахождение мировой фиксации объекта в  $\tilde{E}_i$  сводится к его аффинному проецированию на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  параллельно  $\tilde{ct}^{(j)}$ , то есть к его проецированию в перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{i,j} \equiv \{x_k^{(i)}, \tilde{ct}^{(j)}\}$  (§ 5.11). Перекрёстное проецирование в данном случае описывается формально гиперболическим деформационным преобразованием, действующим в той же псевдоплоскости, что и ротация. Но теперь она имеет свойства *квазиевклидовой* плоскости, так как при данном деформационном преобразовании в ней действует *квазиевклидов инвариант*, или перекрёстный евклидов инвариант (§ 12.3). Геометрический объём мировой фиксации объекта имеет максимальное значение именно для собственной характеристики:

$$V = v^{(i,j)}/\text{sch } \gamma = \max \langle v^{(i,j)} \rangle. \quad (40A)$$

В зависимости от размерности геометрического объекта, как хорошо известно, возможны четыре варианта его мировой траектории: *линия* для объекта размерности 0 (точка); *полоса* для объекта размерности 1 (стержень); трёх- или четырёхмерный *брюс* для объектов размерности 2 (треугольник, параллелограмм) или 3 (тетраэдр, параллелепипед). Здесь используются простейшие геометрические объекты, сводимые математически к линеорам (§ 5.1). Множество всех мировых фиксаций данного объекта тождественно множеству всех пространствуподобных сечений его мировой траектории. В частности, относительно неподвижный наблюдатель  $N_1$  фиксирует стержень одновременно как проекцию на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\tilde{ct}^{(2)}$  (рис.1A).

Мировые фиксации, как и мировые линии, или траектории, – тензорные понятия валентности 1. Для вышеуказанных простейших геометрических объектов мировая фиксация выражается либо как  $4 \times 1$ -вектор, либо как  $4 \times 2$ -линеор, либо как  $4 \times 3$ -линеор в зависимости от размерности. Если объект физически покоится в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ , то в  $\tilde{E}_j$

определяется его собственная мировая фиксация. В базисе  $\tilde{E}_j$  объекты размерности 1, 2 и 3, приложенные в некоторой мировой точке, выражаются как элементы линейного пространства Минковского:

$$\mathbf{a}^{(j)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ 0 \end{pmatrix}^{(j)}; \quad A_{4 \times 2}^{(j)} = \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \Delta x_{12} \\ \Delta x_{21} & \Delta x_{22} \\ \Delta x_{31} & \Delta x_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{(j)}; \quad A_{4 \times 3}^{(j)} = \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \Delta x_{12} & \Delta x_{13} \\ \Delta x_{21} & \Delta x_{22} & \Delta x_{23} \\ \Delta x_{31} & \Delta x_{32} & \Delta x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(j)}. \quad (41A)$$

В комбинированном перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{j,i}$  они те же:

$$\mathbf{a}^{(j,i)} = \mathbf{a}^{(j)}; \quad A_{4 \times 2}^{(j,i)} = A_{4 \times 2}^{(j)}; \quad A_{4 \times 3}^{(j,i)} = A_{4 \times 3}^{(j)}. \quad (42A)$$

При деформационных модальных преобразованиях координат этих тензоров в другой перекрёстный базис  $\tilde{E}_{i,j}$  действует квазиеуклидов метрический инвариант:

$$[\mathbf{a}^{(j)}]'\cdot\mathbf{a}^{(j)} = [\mathbf{a}^{(i,j)}]'\cdot\mathbf{a}^{(i,j)} = l_0^2 = \text{const} > 0, \quad (43A)$$

$$[A^{(j)}]'\cdot A^{(j)} = [A^{(i,j)}]'\cdot A^{(i,j)} = |A|^2 = \text{Const}. \quad (44A)$$

Этот инвариант схож с евклидовым ввиду имеющейся в  $\tilde{E}_{ij}$  сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа (§ 6.2):

$$\text{defh } \Gamma_{ij} \equiv \text{rot } \Phi(\Gamma_{ij}). \quad (45A)$$

Поскольку при определении мировой фиксации применяется перекрёстное проецирование, то для нахождения новых координат тензоров используется деформационная матрица с тем же гиперболическим углом, но обратная по отношению к модальной матрице, связывающей перекрёстные базисы:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \text{defh } \Gamma_{ij} \cdot \mathbf{a}^{(j,i)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(i,j)} \\ \Delta x_2^{(i,j)} \\ \Delta x_3^{(i,j)} \\ \Delta ct^{(j,i)} \end{pmatrix}, \quad (46A)$$

$$A_{4 \times 2}^{(i,j)} = \text{defh } \Gamma_{ij} \cdot A_{4 \times 2}^{(j,i)} = \begin{pmatrix} \Delta x_{11}^{(i,j)} & \Delta x_{12}^{(i,j)} \\ \Delta x_{21}^{(i,j)} & \Delta x_{22}^{(i,j)} \\ \Delta x_{31}^{(i,j)} & \Delta x_{32}^{(i,j)} \\ \Delta ct_1^{(j,i)} & \Delta ct_2^{(j,i)} \end{pmatrix}, \quad (47A)$$

$$\mathbf{A}_{4 \times 3}^{(i,j)} = \text{defh } \Gamma_{ij} \cdot \mathbf{A}_{4 \times 3}^{(j,i)} = \begin{vmatrix} \Delta x_{11}^{(i,j)} & \Delta x_{12}^{(i,j)} & \Delta x_{13}^{(i,j)} \\ \Delta x_{21}^{(i,j)} & \Delta x_{22}^{(i,j)} & \Delta x_{23}^{(i,j)} \\ \Delta x_{31}^{(i,j)} & \Delta x_{32}^{(i,j)} & \Delta x_{33}^{(i,j)} \\ \Delta ct_1^{(j,i)} & \Delta ct_2^{(j,i)} & \Delta ct_3^{(j,i)} \end{vmatrix}. \quad (48A)$$

Первые три строки тензоров в новом перекрёстном базисе определяют новые евклидовы характеристики (координаты) объекта в конкретной мировой фиксации. Используя каноническую структуру (365), выразим новые координаты стержня (46А) через исходные:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{vmatrix} \Delta x_1^{(j)} - \cos \alpha_1 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma) \\ \Delta x_2^{(j)} - \cos \alpha_2 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma) \\ \Delta x_3^{(j)} - \cos \alpha_3 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma) \\ \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot \operatorname{th} \gamma \end{vmatrix}, \quad (49A)$$

где:  $l_0 = \|\mathbf{a}^{(j)}\|$  – длина стержня в состоянии покоя;  $\varepsilon$  – угол между стержнем в состоянии покоя и вектором антискорости  $(-\mathbf{v}_{ji}) = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{v}_{ij})^{(j)}$  с направляющими косинусами в суббазисе  $\tilde{E}_j^{(3)}$ , что и у вектора  $\mathbf{v}_{ij}$  в суббазисе  $\tilde{E}_i^{(3)}$ . Причём имеем соотношение:

$$\cos \alpha_1 \cdot \Delta x_1^{(j)} + \cos \alpha_2 \cdot \Delta x_2^{(j)} + \cos \alpha_3 \cdot \Delta x_3^{(j)} = \mathbf{e}_a' \cdot \mathbf{a}^{(j)} = \cos \varepsilon \cdot l_0 = \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^{(j)}\|. \quad (50A)$$

Изложенное выражает тригонометрическим образом лоренцево сокращение линеорных объектов с точки зрения преобразования их псевдодекартовых координат в состоянии относительного покоя.

Отметим ещё один релятивистский эффект: *векторы скорости и антискорости образуют гиперболический угол  $\gamma_{ij}$ , а не тождественны*. Если направление скорости совпадает с осью  $x_1$ , то  $\cos \alpha_1 = +1$ ,  $\cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0$ ; и новые координаты стержня определяются в виде:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{vmatrix} 0 + \operatorname{sch} \gamma \cdot \Delta x_1^{(j)} \\ \Delta x_2^{(j)} + 0 \\ \Delta x_3^{(j)} + 0 \\ 0 + \operatorname{th} \gamma \cdot \Delta x_1^{(j)} \end{vmatrix}, \quad (51A)$$

где дана разбивка на нерелятивистскую и релятивистскую части. Если же при этом ориентация стержня и вектора антискорости одинакова ( $\cos \varepsilon = +1$ ), то имеем:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \operatorname{sch} \gamma \cdot l_0 \\ 0 \\ 0 \\ \operatorname{th} \gamma \cdot l_0 \end{bmatrix}. \quad (52A)$$

Первая евклидова координата здесь определяется по формуле лоренцева сокращения протяжённости [37, с.109]:

$$l^{(i,j)} = \operatorname{sch} \gamma_{ij} \cdot l_0 = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot l_0 < l_0. \quad (53A)$$

Нормальные относительно вектора антискорости координаты стержня не изменяются. Новые и исходные координаты стержня в (49A) и в частных случаях (51A), (52A) подчиняются квазиеуклидову инварианту (43A). Просуммировав квадраты пространственных координат в (49A), получаем квадрат евклидовой длины движущегося стержня. В самом общем случае для ориентированного стержня лоренцево сокращение его евклидовой проекции-фиксации равно

$$\begin{aligned} l^{(i,j)} &= \|\Delta \mathbf{x}^{(i,j)}\| = l_0 \cdot \sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{ij} + \sin^2 \varepsilon} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{ij}} \\ &= l_0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon \cdot (v/c)^2} < l_0. \end{aligned} \quad (54A)$$

В соответствии с принципом Герглотца выявим её релятивистскую и нерелятивистскую составляющие. Часть стержня-фиксации, нормальная вектору антискорости в  $\tilde{E}_j^3$ , инвариантна и является нерелятивистской составляющей

$$[\mathbf{a}^{(i,j)}]_{\text{inv}} = \mathbf{a}^{(j)} - \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{e}_a \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (55A)$$

Вычитая из (49A) вектор (55A), получаем релятивистскую часть

$$[\mathbf{a}^{(i,j)}]_{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \cdot \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \cdot l_0 \\ \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma \cdot l_0 \end{bmatrix} = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \cdot l_0 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \operatorname{sh} \gamma \end{bmatrix}. \quad (56A)$$

Применяя к данной евклидовой части теорему Пифагора, получаем релятивистскую составляющую квадрата евклидовой длины движущегося стержня  $(\cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \cdot l_0)^2$ . Аналогичным образом из (55A) и (50A) получаем нерелятивистскую составляющую  $(\sin \varepsilon \cdot l_0)^2$ . Это алгебраически объясняет структуру (54A). (Она же может быть получена графическим способом.) Итак, евклидова длина движущегося стержня складывается, согласно (54A), в ортогональной сумме Герглотца в  $\langle E^3 \rangle^{(i)}$  из нерелятивистской проекции  $\langle \sin \varepsilon \cdot l_0 \rangle$  и релятивистской

проекции  $\langle \cos \varepsilon \cdot \text{sch} \gamma \cdot \ell_0 \rangle$ . Первая из них есть нормальная проекция стержня относительно вектора антискорости  $(-\mathbf{v}_{ij})$ . При перекрёстном проецировании (гиперболической деформации) она инвариантна. Поэтому данная составляющая сферически ортогональна обоим векторам скоростей:  $\mathbf{v}_{ij}$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  и  $(-\mathbf{v}_{ji})$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ . Вторая из них получается из параллельной проекции стержня перекрёстным проецированием параллельно  $\tilde{\mathbf{ct}}^{(j)}$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ , конкретно на направление  $\mathbf{v}_{ij}$ .

Квадрат квазивклидовой длины стержня как в целом, так и только в его релятивистской проекции, согласно (43А), есть квадратичный метрический инвариант вне изотропного конуса, или квазивклидов инвариант:

$$\ell_0^2 = [\ell^{(i,j)}]^2 = \|\Delta x^{(i,j)}\|^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = [\ell^{(i,j)}]^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = \text{const}, \quad (57\text{A})$$

$$[\ell_0]_{\text{rel}}^2 = \ell_0^2 \cdot \cos^2 \varepsilon = \|\Delta x^{(i,j)}\|_{\text{rel}}^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = [\ell^{(i,j)}]_{\text{rel}}^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = \text{const}. \quad (58\text{A})$$

Инвариант (58А) приводится к тригонометрической форме

$$(\text{sch}^2 \gamma_1'' + \text{sch}^2 \gamma_2'' + \text{sch}^2 \gamma_3'') + \text{th}^2 \gamma = \|\text{sch}^2 \gamma\| + \text{th}^2 \gamma = \text{sch}^2 \gamma + \text{th}^2 \gamma = 1, \quad (59\text{A})$$

где  $\gamma_k''$  – гиперболический угол между вектором антискорости  $(-\mathbf{v}_{ij})$  и осью  $x_k$  в суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_i^3$ ;  $\text{sch} \gamma_k'' = \cos \alpha_k \cdot \text{sch} \gamma$ . Это инвариант деформационных гиперболических преобразований для единичного пространствуподобного линейного элемента. Собственная длина стержня, то есть его евклидова длина в состоянии покоя, – квазивклидов метрический инвариант в любых других перекрёстных базисах  $\tilde{\mathbf{E}}_{k,j}$ , в частности, и в  $\tilde{\mathbf{E}}_{i,j}$ :

$$\ell_0 = \frac{\ell^{(i,j)}}{\sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \text{sch}^2 \gamma + \sin^2 \varepsilon}} = \max < \ell^{(i,j)}. \quad (60\text{A})$$

Родственная формула (54А) выражает тригонометрически релятивистский эффект лоренцева сокращения евклидовой протяжённости движущегося стержня вдоль направления его физического движения. Данный эффект также имеет чисто координатную природу. Отметим, что эффект сокращения движущегося объекта исторически впервые установил Фитцджеральд (1892 г.).

Множество всех мировых фиксаций движущегося стержня по сути полуоткрытое, так как оно не содержит крайних сечений его мировой траектории гиперповерхностью изотропного конуса (рис. 1А). Указанные крайние сечения имеют нулевую евклидову длину релятивистской ортопроекции, а для объектов ранга  $> 1$  имеют нулевые евклидовы нормы порядка 1 и 2 для релятивистской составляющей

проекции и порядка 3 – для их объёмной фиксации в целом. Они соответствуют объектам, движущимся как бы со скоростью света.

Рассматриваемый пространствуподобный феномен в новом перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{i,j}$ , согласно (49А), имеет и временную проекцию. Но эта проекция относится к стреле времени  $\tilde{ct}^{(j)}$ . Следовательно, она трактуется в системе  $\tilde{E}_j$  и объясняется так. Наблюдатель  $N_j$  воспринимает другой равнозначный стержень, покоящийся на оси  $x^{(i)}$ , как укороченный с евклидовой длиной, тождественно равной (53А). Когда в процессе движения оба стержня сойдутся, их отдельно левые и отдельно правые концы встретятся с эксцессом времени в системе  $\tilde{E}_j$ :

$$\Delta ct^{(j,i)} = l_0 \cdot \text{th } \gamma_{ij}. \quad (61\text{A})$$

В классической кинематике его бы не было. Конечно, в обоих случаях одновременность трактуется по Эйнштейну, чтобы не учитывать время распространения света от одного конца стержня к другому. Это *релятивистский эффект неодновременности встречи начала и конца двух равнозначных стержней* (коллинеарных и соосных направлению движения). Он обусловлен тем, что движущееся евклидово пространство претерпевает гиперболическую ротацию (как и стрела времени), а вместе с ним и стержень. Формула (61А) выражает эксцесс времени для случая, когда один из стержней покоятся, а другой движется. Если сопоставить друг против друга равнозначные точки этих стержней, то контакт пар точек при встрече стержней распространяется в системе  $\tilde{E}_j$  вдоль оси  $x^{(j)}$  слева направо со сверхсветовой скоростью:

$$w = l_0 / \Delta t^{(j,i)} = c \cdot \text{cth } \gamma_{ij} = c^2/v > c. \quad (62\text{A})$$

Понятно, что в классической кинематике все эти пары точек встречаются одновременно.

В квазиплоскости гиперболической деформации, тождественной псевдоплоскости гиперболической ротации, рассматриваемая задача сводится к решению плоского “внешнего” гиперболически прямоугольного треугольника (§ 6.4), в котором  $l^{(i,j)}$  – гипотенуза «g»,  $l_0$  – катет «a» и  $\Delta ct^{(j,i)}$  – катет «b» (см. рис. 1А).

Заметим, что в произведениях (46А)–(48А) деформационная гиперболическая матрица действует формально в усечённом виде, а именно только своими тремя верхними строками. (Сравним это с аналогичным замечанием в гл. 5А для ротационного преобразования координат.) Вызвано это тем, что исходные линейные элементы (линеоры) параллельны собственному евклидову подпространству.

Результат лоренцева сокращения движущегося векторного элемента выражается в векторном виде формулой (49А), а в скалярном виде

формулой (54А). В перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{i,j}$  для двух векторов имеем:

$$\cos \beta_{12}^{(i,j)} = [\mathbf{g}_1^{(i,j)}] \cdot [\mathbf{g}_2^{(i,j)}] / \|\mathbf{g}_1^{(i,j)}\| \cdot \|\mathbf{g}_2^{(i,j)}\| = [\mathbf{e}_1^{(i,j)}] \cdot [\mathbf{e}_2^{(i,j)}].$$

Здесь используется обычное выражение для косинуса скалярного угла между векторами-фиксациями в евклидовом подпространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ . Применив к этому выражению ранее полученное соотношение (54А), в итоге получаем релятивистский вариант формулы для косинуса угла между двумя вместе движущимися векторными элементами:

$$-1 < \cos \beta_{12}^{(i,j)} = \frac{\cos \beta_{12}^{(j)} - \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma}} < +1 \quad (63A)$$

$$(0 < \beta_{12}^{(i,j)} < +\pi),$$

где  $\beta_{12}^{(i,j)}$  – скалярный угол между данными векторами, измеряемый наблюдателем  $N_i$ . Заметим, что исходная пара векторов и вектор антискорости составляют некоторую тройку векторов в евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ . Согласно неравенству Адамара, для определителя Грама имеем:

$$0 \leq \det \{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]' \cdot [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\} = s_{123}^2 \leq 1. \quad (64A)$$

Отсюда следует тригонометрическое неравенство

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{23} &\leq \cos^2 \alpha_{12} + \cos^2 \alpha_{13} + \cos^2 \alpha_{23} \leq \\ &\leq 1 + 2 \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{23}. \end{aligned}$$

В данном случае  $\alpha_{13} = \varepsilon_1$ ,  $\alpha_{23} = \varepsilon_2$ ,  $\alpha_{12} = \beta_{12}$ . С учётом этого и дополнительного условия  $\operatorname{th}^2 \gamma < 1$  неравенство (63А) получает строгое обоснование. Если исходный угол между векторами прямой ( $\cos \beta_{12}^{(j)} = 0$ ), то новый угол либо острый ( $\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 < 0$ ), либо тупой ( $\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 > 0$ ). Если же  $\beta_{12}^{(j)} = 0$ , то  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  и  $\beta_{12}^{(i,j)} = 0$ . Если оба вектора ортогональны вектору антискорости, а следовательно, и сам угол тоже, то в таком случае, конечно, релятивистский эффект изменения угла отсутствует:  $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 = 0 \rightarrow \beta_{12}^{(i,j)} = \beta_{12}^{(j)}$ . Если же один из векторов коллинеарен вектору антискорости, то тогда  $|\cos \beta_{12}|$  уменьшается. При этом тупой угол уменьшается, а острый увеличивается:

$$0 < \cos \beta_{12}^{(i,j)} = \cos \beta_{12}^{(j)} \cdot \sqrt{\frac{1 - \operatorname{th}^2 \gamma}{1 - \cos^2 \beta_{12}^{(j)} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma}} < \cos \beta_{12}^{(j)}. \quad (65A)$$

Релятивистская площадь параллелограмма, образуемого движущимися векторами, составляет:

$$\begin{aligned} S_{12}^{(i,j)} &= \ell_1^{(i,j)} \cdot \ell_2^{(i,j)} \cdot \sin \beta_{12}^{(i,j)} = \\ &= \frac{S_{12}^{(j)}}{\sin \beta_{12}^{(j)}} \cdot \sqrt{\sin^2 \beta_{12}^{(j)} - (\cos^2 \varepsilon_1 + \cos^2 \varepsilon_2 - 2 \cos \beta_{12}^{(j)} \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2) \cdot \operatorname{th}^2 \gamma}. \quad (66A) \end{aligned}$$

Диагонали движущегося параллелограмма подвержены лоренцеву сокращению, если при этом они не ортогональны вектору антискорости. В общем случае имеем следующие релятивистские значения для длин диагоналей (первой и второй):

$$[L^{(i,j)}]_{1,2}^2 = [L^{(j)}]_{1,2}^2 - [\ell_1^{(j)} \cdot \cos \varepsilon_1 \pm \ell_2^{(j)} \cdot \cos \varepsilon_2]^2 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma. \quad (67A)$$

Объём параллелепипеда, как и любого другого тела, уменьшается прямо пропорционально секансу гиперболического угла движения. Учтя дополнительно (64А) и (54А), вычисляем синусную норму движущегося трёхмерного линеорного угла:

$$0 < s_{123}^{(i,j)} = \frac{s_{123}^{(j)} \cdot \operatorname{sch} \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_3 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma}} < 1. \quad (68A)$$

Неравенство нетрудно доказать, выразив ту же синусную норму через (63А) и (64А):

$$\begin{aligned} [s_{123}^{(i,j)}]^2 &= 1 + 2 \cdot \cos \beta_{12}^{(i,j)} \cdot \cos \beta_{13}^{(i,j)} \cdot \cos \beta_{23}^{(i,j)} - \cos^2 \beta_{12}^{(i,j)} - \\ &\quad - \cos^2 \beta_{13}^{(i,j)} - \cos^2 \beta_{23}^{(i,j)}. \end{aligned}$$

## Глава 5А. Тригонометрические модели коллинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии

Рассмотрим тригонометрическую интерпретацию суммирования коллинеарных физических движений. В этой главе, как правило, скорости и ускорения фигурируют в скалярной форме. Релятивистский закон сложения скоростей Пуанкаре – Эйнштейна для случая их коллинеарности имеет простую гиперболическую интерпретацию в форме *согласованной двухступенчатой ротации* (486):

$$\operatorname{roth} \Gamma_{13} = \operatorname{roth} \Gamma_{12} \cdot \operatorname{roth} \Gamma_{23} = \operatorname{roth} (\Gamma_{12} + \Gamma_{23});$$

$$\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13} = \cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23} \quad (\cos \alpha = \pm 1, \gamma > 0), \quad (69A)$$

$$\operatorname{th} [\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13}] = \operatorname{th} [\cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23}], \quad (70A)$$

$$v_{13} = c \cdot \operatorname{th} [\operatorname{Arth} v_{12}/c + \operatorname{Arth} v_{23}/c] = (v_{12} + v_{23})/(1 + v_{12} \cdot v_{23}/c^2)$$

$$(v_{12} \cdot v_{23} > 0 \leftrightarrow |v_{13}| < |v_{12}| + |v_{23}|, \quad v_{12} \cdot v_{23} < 0 \leftrightarrow |v_{13}| > ||v_{12}| - |v_{23}|||).$$

Гиперболическая форма данного закона впервые была установлена Зоммерфельдом с геометрической интерпретацией на *сфере мнимого радиуса* [37, с. 111; 62]. В свете вышеизложенного последняя есть гиперболоид II Минковского (§ 12.1). По существу это есть правило суммирования тангенсных проекций согласованных гиперболических отрезков. Релятивистский закон сложения нескольких коллинеарных скоростей в тригонометрической форме выражается в многоступенчатой интерпретации в виде:

$$\cos \alpha \cdot \gamma = \sum_{t=1}^m \cos \alpha_{(t)} \cdot \gamma_{(t)} \quad (\cos \alpha = \pm 1, \gamma > 0), \quad (71A)$$

$$v = c \cdot \operatorname{th} \sum_{t=1}^m \operatorname{Arth} v_t/c. \quad (72A)$$

Термин “коллинеарность” здесь довольно условен и означает только то, что векторы частных скоростей всегда коллинеарны собственной оси  $x^{(t)}$  в пределах одной и той же псевдоплоскости  $\langle x, \vec{ct} \rangle$ . При этом безразлично, в каких конкретных точках мировой траектории

осуществляются элементарные акты суммирования скоростей. Но обязательно то, чтобы сама мировая линия оставалась всегда в пределах этой псевдоплоскости. В частности, скорости могут суммироваться интегрально вдоль мировой линии при движении с ускорением.

Аналогично, в пространстве-времени Минковского или Лагранжа прямолинейное физическое *движение* определяется такой мировой линией, которая располагается в пределах одной и той же псевдоплоскости. Отсюда видна условность термина “прямолинейное движение” для этих пространств событий. Проекция такой криволинейной мировой траектории параллельно любой мгновенной оси собственного времени на собственное евклидово подпространство есть прямая линия со своим направляющим вектором. (В частности, последнее может относиться к универсальному базису  $\tilde{E}_1$ .)

В тригонометрической версии СТО определяется *характеристический гиперболический угол* движения  $\gamma$  как угол наклона мировой линии к стреле времени (рис. 2А). Он относителен, как и последняя. Если особо не оговорено, то  $\gamma$  отсчитывается в универсальном базисе относительно  $\tilde{ct}^{(1)}$ . Угол движения  $\gamma_{ij}$  и любые его функции есть *относительные инварианты*. Для прямой мировой линии относительная скорость между наблюдателями  $N_1$  и  $N_2$  определяется гиперболическим тангенсом угла движения с двух противоположных точек зрения [рис. 2А (1)]:

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \gamma_{12} = v_{12}/c &= \Delta x^{(1)}/\Delta ct^{(1)} = (\Delta x^{(1)} \cdot \operatorname{sch} \gamma)/(\Delta ct^{(1)} \cdot \operatorname{sch} \gamma) = \\ &= -\Delta x^{(2)}/\Delta ct^{(2)} = -\operatorname{th} \gamma_{21} \end{aligned} \quad (73A)$$

( $x^{(1)} = \chi$ ,  $ct^{(2)} = ct$  – собственные координаты).

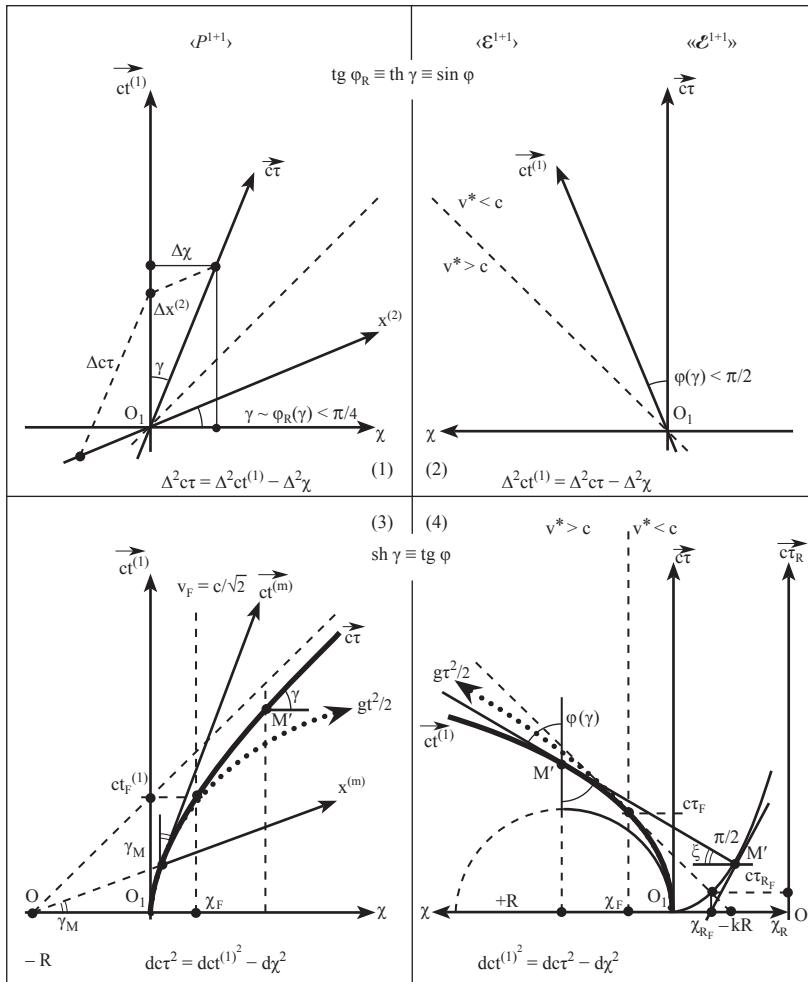
То же имеет место при прямолинейном физическом движении с ускорением (замедлением). С каждой точкой его мировой линии связан *мгновенный псевдодекартов базис* с учётом вектора параллельного переноса центра координат в эту точку:

$$\tilde{E}_m = \operatorname{roth} \Gamma \cdot \tilde{E}_1 = F_1(\gamma, e_\alpha) \cdot \tilde{E}_1. \quad (74A)$$

Гиперболический тангенс, определяющий скорость физического движения, выражается двояко – с точек зрения наблюдателей  $N_1$  и  $N_m$ :

$$\operatorname{th} \gamma = \frac{v}{c} = \frac{d \chi}{d ct^{(1)}} = \frac{d x^{(1)}}{d ct^{(1)}} = \frac{d x^{(1)} \cdot \operatorname{sch} \gamma}{d ct^{(1)} \cdot \operatorname{sch} \gamma} = -\frac{d x^{(m)}}{d ct^{(m)}} = -\frac{d x^{(m)}}{d ct}. \quad (75A)$$

За собственное (истинное) расстояние  $\chi$  здесь принимается координата  $x^{(1)}$ , то есть неподвижная в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ .



**Рис. 2А.** Мировые линии материальной точки М для простейших прямолинейных физических движений – равномерного (1, 2) и равномерно ускоренного (3, 4) в универсальном, собственном и сжатом базисах (..... ➤ – кинематические параболы).

За собственное время здесь принимается величина

$\tau = \int_0^t dt^{(m)} = \int_0^t \operatorname{sch} \gamma dt^{(1)}$ , то есть время, измеренное по хронометру в движущемся объекте или суббазисе  $\tilde{E}_m^{(3)}$ .

Криволинейная мировая траектория тождественна криволинейной стреле собственного времени  $\int_0^t d\tau^{(m)} \equiv \vec{ct}$  [рис. 2А (3)] для движущегося объекта. Её направленная касательная  $\vec{ct}^{(m)}$ , вместе с тем, есть мгновенная стрела собственного времени. В формулах (73А), (75А) при вычислении относительной скорости наблюдателей  $N_2$  или  $N_m$  используется движущаяся координата  $x^{(2)}$  или  $x^{(m)}$ , которая в  $E_1$  релятивистски сокращена в сравнении с собственной координатой  $\chi = x^{(1)}$ . Аналогично, при измерении той же скорости  $v$  наблюдателем  $N_1$  используется координатное время  $t^{(1)}$ , которое здесь релятивистски увеличено в сравнении со временем  $\tau$ . Поэтому вычисляемая скорость  $v$  по существу координатная. С другой стороны, *собственная скорость* физического движения (39А) определяется с использованием только собственных координат, а тригонометрически – через соответствующий относительный синусный инвариант:

$$\frac{v^*}{c} = \frac{d x^{(1)}}{d \tau^{(m)}} = \frac{d \chi}{d \tau} = \operatorname{ch} \gamma \cdot \operatorname{th} \gamma = \operatorname{sh} \gamma > \frac{v}{c}. \quad (76A)$$

Закон сложения коллинеарных собственных скоростей имеет синусную интерпретацию (хотя гиперболические углы суммируются точно также, как и ранее):

$$\begin{aligned} v_{13}^* &= c \cdot \operatorname{sh} [\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13}] = c \cdot \operatorname{sh} [\cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23}] = \\ &= v_{12}^* \cdot \sqrt{1 + (v_{23}^*/c)^2} + v_{23}^* \cdot \sqrt{1 + (v_{12}^*/c)^2} \end{aligned} \quad (77A)$$

$$(v_{12} \cdot v_{23} > 0 \leftrightarrow |v_{13}^*| > |v_{12}^*| + |v_{23}^*|);$$

$$v^* = v/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad v = v^*/\sqrt{1 + (v^*/c)^2} \quad (1/v^2 = 1/v^{*2} + 1/c^2),$$

что эквивалентно соотношению  $\operatorname{cth}^2 \gamma = \operatorname{cosh}^2 \gamma + 1$ .

Векторы  $\mathbf{v}^*$ ,  $\mathbf{sh} \gamma$  имеют те же направляющие косинусы, что и векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{th} \gamma$ , так как они получаются из одного и того же векторного параметра  $dx$  в числителе дроби.

Заметим также, что в формуле (75А) производная  $\frac{d x^{(m)}}{d \tau}$  задаёт скорость удаления  $N_1$  от  $N_m$ , где  $d x^{(m)} < 0$ . Совершенно другой смысл имеет производная  $\frac{d x^{(m)}}{d \tau}$ , когда ускорение движения рассматривается

с точки зрения мгновенной системы  $\tilde{E}_m$ . Тогда в её мгновенном начале координат  $M$  скорость (производная) нулевая. Поэтому определим в окрестности точки  $M$  криволинейной *плоской* мировой траектории два гиперболических угла, а именно  $\gamma^{(1)} = \gamma$  – общий угол движения

в системе  $\tilde{E}_1$  и  $d\gamma^{(m)}$  – дополнительный угол движения в системе  $\tilde{E}_m$ , вызванный *внутренним ускорением* (или *замедлением*) движения. Дифференциалы координатных скоростей в  $\tilde{E}_1$  и в  $\tilde{E}_m$  в окрестности точки М выражаются в тригонометрической форме:

$$d \frac{dx^{(1)}}{dct^{(1)}} = d \frac{d\chi}{dct^{(1)}} = d \operatorname{th} \gamma = \operatorname{sch}^2 \gamma d\gamma, \quad (78A)$$

$$d \frac{dx^{(m)}}{dct^{(m)}} = d \frac{dx^{(m)}}{dct} = d \operatorname{th} \delta\gamma^{(m)} = \operatorname{sch}^2 \delta\gamma^{(m)} d\delta\gamma^{(m)} = d\delta\gamma^{(m)} = d\gamma^{(m)} = d\gamma. \quad (79A)$$

Причём в точке М:  $\delta\gamma^{(m)} \rightarrow 0$ , а  $d\gamma$  выражается в том же мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$  вдоль мировой линии с постоянным  $e_\alpha$  и поэтому  $d\delta\gamma^{(m)} = d\gamma$ . Тогда внутреннее ускорение в системе  $\tilde{E}_m$  с учётом (79A) вычисляется следующим образом:

$$\frac{dv^{(m)}}{d\tau} = \frac{d^2x^{(m)}}{d\tau^2} = c \cdot \frac{d \operatorname{th} \delta\gamma^{(m)}}{d\tau} = c \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} = g(\tau). \quad (80A)$$

Для мгновенных систем отсчёта  $\tilde{E}_m$  в пространстве-времени Минковского СТО используется на дифференциальном уровне (с последующим интегрированием получаемых выражений). Поэтому логично, что  $\tilde{E}_m$  принимается мгновенно инерциальной [8, с. 25]. Одновременность трактуется здесь именно в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ .

Ввиду того что внутренняя скорость  $\frac{dx^{(m)}}{d\tau}$  в окрестности точки М исчезающе мала, объект в системе  $\tilde{E}_m$  имеет инертную массу, равную массе покоя  $m_0$ . Следовательно, при действии на материальный объект в момент времени  $\tau$  некоторой *собственной силы*  $F$  в направлении оси  $x^{(m)}$  он получает в системе  $\tilde{E}_m$  внутреннее ускорение, согласно 2-му закону механики Ньютона:

$$g(\tau) = F(\tau)/m_0. \quad (81A)$$

Собственная сила  $F$ , действующая в  $\tilde{E}_m$ , тождественна во всех системах отсчёта (например, для силы инерции это есть число по шкале динамометра в  $\tilde{E}_m^{(3)}$ ). Точно также и масса покоя  $m_0$  не зависит от системы отсчёта. Ввиду этого внутреннее ускорение, определяемое формулами (80A), (81A), есть *абсолютный инвариант*. В отличие от соответствующих *относительных инвариантов* эта характеристика непосредственно от  $\gamma$  (или от скорости движения) не зависит.

Значение внутреннего ускорения первично определяется каким-либо абсолютным законом, вызывающим действие собственной силы именно в точке её приложения. В силу принципа относительности для его значения безразлично: движется расчётная координата  $x^{(m)}$  или поконится.

С учётом этого обстоятельства именно  $g(\tau)$  является базовым ускорением в теории относительности. Оно же однозначно определяет гиперболическую кривизну мировой линии в пространстве-времени Минковского. Причём при тангенциальном ускорении мировая линия вместе с векторными параметрами движения остаётся в пределах одной и той же псевдоплоскости и  $\bar{\bar{g}}(\tau) \parallel x^{(m)}$ . В частности, постоянное тангенциальное внутреннее ускорение  $g = \bar{\bar{g}}$  задаёт равномерно ускоренное (замедленное) движение по псевдоокружности (гиперболе). Заметим, что кинематическая гипербола всегда принадлежит собственному гиперболоиду I Минковского с общим их центром. Впервые такой простейший тип неравномерного релятивистского движения в СТО был изучен Минковским, а затем – в работах Борна и Зоммерфельда [37, с. 111 – 114; 51, 62]. Представляют интерес ещё два типа тангенциального ускорения. Собственное ускорение в  $\tilde{E}_m$  с учётом (76А), (80А) вычисляется следующим образом:

$$\bar{\bar{g}}^*(\tau) = \frac{d v^*}{d \tau} = \frac{d^2 \chi}{d \tau^2} = c \cdot \frac{d \operatorname{sh} \gamma}{d \tau} = c \cdot \operatorname{ch} \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d \tau} = \operatorname{ch} \gamma \cdot \bar{\bar{g}}(\tau) > \bar{\bar{g}}(\tau). \quad (82A)$$

Оно больше внутреннего ускорения, ввиду того что в (80А) дифференциал  $d^2 x^{(m)}$  (как  $x^{(m)}$  и  $dx^{(m)}$ ) релятивистски сокращён в сравнении с собственной величиной  $d^2 x^{(1)}$ . Координатное ускорение в  $\tilde{E}_1$  с учётом (78А), (80А) наоборот меньше внутреннего:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{g}}^{(1)}(t^{(1)}) &= \frac{d v}{d t^{(1)}} = \frac{d^2 \chi}{d t^{(1)2}} = c \cdot \frac{d \operatorname{th} \gamma}{d t^{(1)}} = c \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d t^{(1)}} = \\ &= c \cdot \operatorname{sch}^3 \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d \tau} = \operatorname{sch}^3 \gamma \cdot \bar{\bar{g}}[\tau(t)^{(1)}] < \bar{\bar{g}}[\tau(t)^{(1)}]. \end{aligned} \quad (83A)$$

В изучаемых инвариантах движения в качестве временных параметров используются  $ct^{(1)}$  и  $ct$ . Инварианты движения синхронны в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ , если они фиксируются в нём одновременно по обоим хронометрам. Соотношения одновременности исходя из проецирования времени параллельно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  в дифференциальной и интегральной формах в  $\tilde{E}_1$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} d ct &= \operatorname{sch} \gamma \ d ct^{(1)}, \\ ct &= \int_0^{ct^{(1)}} \operatorname{sch} \gamma \ d ct^{(1)}; \end{aligned} \right\} \quad (84A)$$

$$\left. \begin{aligned} d ct^{(1)} &= \operatorname{ch} \gamma \ d ct, \\ ct^{(1)} &= \int_0^{ct} \operatorname{ch} \gamma \ d ct. \end{aligned} \right\} \quad (85A)$$

Они получаются срезом параллельно оси  $x^{(1)} = \chi$ . Собственное время  $c\tau$ , согласно (84А), есть псевдоеклидова длина дуги мировой линии. При *интегральном движении* (также коллинеарном) угол  $\gamma$  и скорость  $v$  изменяются непрерывно. В частности, при равномерно ускоренном движении  $\bar{\bar{g}}(\tau) = \bar{\bar{g}} = \text{const}$ . С учётом (80А), (84А) имеем:

$$\left. \begin{aligned} d\gamma &= \bar{\bar{g}}/c \, d\tau \rightarrow \bar{\bar{R}} \, d\gamma = d\tau, \\ \gamma &= \bar{\bar{g}}/c \cdot \tau \rightarrow \bar{\bar{R}} \cdot g = c\tau \quad (\bar{\bar{g}} = \text{const}); \end{aligned} \right\} \quad (86\text{A})$$

$$\left. \begin{aligned} d \sinh \gamma &= \bar{\bar{g}}/c \, dt^{(1)} \rightarrow R \, d \sinh \gamma = d ct^{(1)}, \\ \sinh \gamma &= \bar{\bar{g}}/c \cdot t^{(1)} \rightarrow \bar{\bar{R}} \cdot \sinh \gamma = ct^{(1)} \quad (\bar{\bar{g}} = \text{const}). \end{aligned} \right\} \quad (87\text{A})$$

Причём  $\frac{d\gamma}{d\tau} = 1/c \cdot \bar{\bar{g}}(\tau)$  – *гиперболическая угловая псевдоскорость*,

$\bar{\bar{R}} = c^2/\bar{\bar{g}}$  – радиус гиперболической кривизны (в том числе как мгновенные характеристики). Теперь указанные соотношения одновременности для равномерно ускоренного движения в  $\tilde{E}_1$  можно выразить через временные аргументы:

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= d ct^{(1)}/\sqrt{1 + [\bar{\bar{g}} \cdot t^{(1)}/c]^2} = d ct^{(1)}/\sqrt{1 + [c \cdot t^{(1)}/\bar{\bar{R}}]^2}, \\ c\tau &= c^2/\bar{\bar{g}} \cdot \text{Arsh}(\bar{\bar{g}} \cdot t^{(1)}/c) = \bar{\bar{R}} \cdot \text{Arsh}(c \cdot t^{(1)}/\bar{\bar{R}}); \end{aligned} \right\} \quad (88\text{A})$$

$$\left. \begin{aligned} d ct^{(1)} &= \text{ch}(\bar{\bar{g}} \cdot \tau/c) \, d\tau = \text{ch}(c \cdot \tau/\bar{\bar{R}}) \, d\tau, \\ ct^{(1)} &= c^2/\bar{\bar{g}} \cdot \sinh(\bar{\bar{g}} \cdot \tau/c) = \bar{\bar{R}} \cdot \sinh(c \cdot \tau/\bar{\bar{R}}); \end{aligned} \right\} \quad (89\text{A})$$

( $t^{(1)}/\tau = \sinh \gamma / \gamma$ ).

Продолжим изучение прямолинейного равномерно ускоренного движения. Координатная и собственная скорости такого движения – функции координатного времени, но они выражаются синхронно в  $\tilde{E}_1$  и через собственное время:

$$v = v_t(t^{(1)}) = c \cdot \text{th} \gamma = \bar{\bar{g}} \cdot t^{(1)}/\sqrt{1 + [\bar{\bar{g}} \cdot t^{(1)}/c]^2} \equiv v_\tau(\tau) = c \cdot \text{th}(\bar{\bar{g}} \cdot \tau/c) < \bar{\bar{g}} \cdot \tau < \bar{\bar{g}} \cdot t^{(1)}, \quad (90\text{A})$$

$$v^* = v_\tau^*(\tau) = c \cdot \sinh \gamma = c \cdot \sinh(\bar{\bar{g}} \cdot \tau/c) \equiv v_t^*(t^{(1)}) = \bar{\bar{g}} \cdot t^{(1)} > \bar{\bar{g}} \cdot \tau. \quad (91\text{A})$$

Эти неравенства имеют тригонометрическую природу:  $\text{th} \gamma < \gamma < \sinh \gamma$ . *Собственное расстояние* как функция времени по хронометру наблюдателя  $N_1$  имеет вид:

$$\chi = \chi_t(t^{(1)}) = \int_0^{t^{(1)}} v_t(t') dt' = \bar{\bar{R}} \cdot (\text{ch} \gamma - 1) = \bar{\bar{R}} \cdot (\sqrt{1 + [ct^{(1)}/\bar{\bar{R}}]^2} - 1). \quad (92\text{A})$$

Неявным образом функциональная связь между  $\chi$  и  $ct^{(1)}$  устанавливается через соотношения:

$$\left. \begin{array}{l} ct^{(1)} = \bar{R} \cdot sh \gamma, \\ \chi = \bar{R} \cdot (ch \gamma - 1). \end{array} \right\} \quad (93A)$$

Как из (92A), так и из (93A) выводится гиперболическое кинематическое уравнение для описания равномерно ускоренного движения в координатах  $\tilde{E}_1 = \langle \chi, \tilde{ct}^{(1)} \rangle$ :

$$(\chi + \bar{R})^2 - (ct^{(1)})^2 = \bar{R}^2, \quad \left. \begin{array}{l} \chi + \bar{R} = ch \gamma \cdot \bar{R} \\ ct^{(1)} = sh \gamma \cdot \bar{R} \end{array} \right\} \rightarrow \bar{R} = \frac{\chi}{ch \gamma - 1} = \frac{ct^{(1)}}{sh \gamma} = \text{const.} \quad (94A)$$

С точки зрения геометрии Минковского это уравнение задаёт псевдоокружность вещественного радиуса  $\bar{R} = c^2/\bar{g}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , а в аффинном смысле – гиперболу. Её траектория имеет постоянную гиперболическую кривизну  $\bar{K} = 1/\bar{R}$ . В СТО данный тип движения поэтому именуется как гиперболическое. Это простейший тип коллинеарного интегрального движения. Кинематическая гипербола занимает промежуточное положение между нерелятивистской кинематической параболой от  $t^{(1)}$  и изотропной прямой светового луча, исходящей из точки О [рис. 2А (3)]:

$$\bar{R} + ct^{(1)} < \chi = \chi_t(t^{(1)}) < \bar{g} \cdot t^{(1)^2}/2 \quad (sh \gamma < ch \gamma < ch^2 \gamma). \quad (95A)$$

То же собственное расстояние как функция времени по хронометру наблюдателя  $N_m$  имеет вид:

$$\chi = \chi_\tau(\tau) = \int_0^\tau v_\tau^*(\tau) d\tau = \bar{R} \cdot (ch \gamma - 1) = \bar{R} \cdot [ch(c \cdot \tau / \bar{R}) - 1]. \quad (96A)$$

Это уравнение гиперболической косинусоиды (цепной линии), представленное в специальных собственных квазидекартовых координатах  $\tilde{E} = \langle \chi, \tilde{ct} \rangle$  [рис. 2А (4)]. Прямолинейная ось  $\tilde{ct}$  здесь получается из гиперболической  $\tilde{ct}$  в  $E_1$  спрямлением и сферической ортогонализацией по отношению к собственному евклидову подпространству  $\langle E^3 \rangle^{(1)} \equiv \langle E^3 \rangle$ , то есть в данном случае к оси  $\chi$ . Формально это осуществляется преобразованием мгновенных характеристических углов движения по сферическо-гиперболической аналогии конкретного синус-тангенсового типа (§ 6.2):

$$tg \phi(\gamma) \equiv sh \gamma, \quad sin \phi(\gamma) \equiv th \gamma.$$

В таких квазидекартовых координатах тангенс угла наклона мировой линии (по отношению к стреле собственного времени) определяет тригонометрически собственную скорость объекта, согласно (76А).

Сферический угол движения в базисе  $\tilde{E}$  заключается в пределах от 0 до  $\pi/2$ . Специальное квазиеуклидово пространство определяется здесь как прямая сферически квазиортогональная сумма собственного евклидова подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и преобразованной по синус-тангенсной аналогии спрямлённой стрелы собственного времени  $\vec{ct}$ :

$$\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oplus \vec{ct}. \quad (97A)$$

На рис. 2А (2) и (4) представлены варианты как для исходной прямолинейной, так и для исходной гиперболической стрелы собственного времени. В последнем случае  $\tilde{E}$  есть неинерциальная система. Мировая линия в этом координатном пространстве описывает движение наблюдателя  $N_1$  в обратном направлении.

Ранее, когда формально использовалась эта аналогия, преобразование самого пространства не осуществлялось. Теперь же перекрёстные подпространства подвергнуты сферической квазиортогонализации; общий угол наклона стал истинным:  $\varphi_R(\gamma) \rightarrow \varphi(\gamma)$ , где  $\operatorname{tg} \varphi_R \equiv \sin \varphi$ . Но правило суммирования согласованных углов, по-прежнему, распространяется только на гиперболические углы:

$$\varphi [\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13}] = \varphi [\cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23}] \quad (98A)$$

$$(\cos \alpha_{(13)} \cdot \varphi_{13} \neq \cos \alpha_{(12)} \cdot \varphi_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \varphi_{23}),$$

где  $\cos \alpha = \pm 1$ .

Мировая линия в специальном квазиеуклидовом пространстве имеет квазиеуклидову протяжённость – времениподобный инвариант преобразования  $\operatorname{defh} \Gamma \equiv \operatorname{rot} \Phi(\Gamma)$ , аналогично пространствуподобному инварианту (57А):

$$\begin{aligned} d\ ct^{(1)2} &= d\ ct^2 + d\chi^2 = (\cos \varphi d\ ct^{(1)})^2 + (\sin \varphi d\ ct^{(1)})^2 \equiv \\ &\equiv (\operatorname{sch} \gamma d\ ct^{(1)})^2 + (\operatorname{th} \gamma d\ ct^{(1)})^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (99A)$$

Равномерное прямолинейное движение описывается прямой с углом наклона  $\varphi = \varphi(\gamma) = \text{const}$  как бы в обычном квазиеуклидовом пространстве (гл.8А). Равномерно ускоренное прямолинейное движение описывается косинусоидой (96А). Для него при неуклонном возрастании времени собственное расстояние стремится сверху к функции

$$f(ct) = \bar{R} \cdot (1/2 \exp ct/\bar{R} - 1).$$

В собственном квазидекартовом базисе кинематическая косинусоида располагается ниже нерелятивистской кинематической параболы от  $\tau$  и фокальной касательной, но выше касательной окружности [рис. 2А (4)]:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{g} \cdot \tau / 2 < \\ -k \cdot \bar{R} + c\tau \leq \end{array} \right\} \chi = \chi_{\tau}(\tau) < R - \sqrt{\bar{R}^2 - (\bar{c}\tau)^2}, \quad (100A)$$

где справа  $|c\tau| \leq |R|$ , причём  $k = \omega + 1 - \sqrt{2} \approx 0,467$ ;  $\omega = \text{Arsh} 1 \approx 0.881$ . Имеем тригонометрический эквивалент этого неравенства:

$$\gamma^2/2 < \text{ch} \gamma - 1 < 1 - \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \text{где справа } |\gamma| \leq 1.$$

Отметим, что в псевдодекартовом и квазидекартовом базисах мировые линии равномерно ускоренного движения располагаются по разным сторонам относительно кинематической параболы. При угле движения  $\gamma_F = \omega$  ( $\varphi(\gamma_F) = \pi/4$ ) собственная скорость  $v^*$  достигает значения «с» и далее преодолевает его при  $\gamma > \omega$  ( $\varphi(\gamma) > \pi/4$ ). Для кинематической гиперболы этот угол соответствует фокусу. Фокальное значение координатной скорости составляет  $v_F = c \cdot \text{sch} \omega = c / \sqrt{2}$ . Координаты фокальной точки в обоих базисах (в псевдоплоскости и в квазиплоскости) выражаются через гиперболический радиус в виде:

$$\chi_F = (\sqrt{2} - 1) \cdot \bar{R} \approx 0,41 \bar{R};$$

$$ct_F^{(1)} = \bar{R}, \quad ct_F = \omega \bar{R} \approx 0,881 \bar{R}.$$

Гиперболическое движение характеризуется также *постоянной гиперболической угловой псевдоскоростью*:

$$\eta_k = \frac{d\gamma}{d\tau} = c / \bar{R} = \bar{g} / c. \quad (101A)$$

Ось гиперболической ротации в этом случае пространствуподобна, псевдоевклидово ортогональна псевдоплоскости ротации и проходит через центр О [рис. 2А (3)]. Фокальные касательные соответствуют скоростям  $v_F$  и  $v_F^* = c$ , а также углам наклона  $\omega$  и  $\varphi(\omega) = \pi/4$ . Используемая в формулах СТО скорость света – координатная характеристика. Собственная скорость света в вакууме  $c^*$  бесконечна.

Классический *принцип соответствия* в математической трактовке здесь проявляется в том, что кинематические гипербола и парабола в точке  $O_1$  [рис. 2А (3)] имеют одну и ту же касательную окружность радиуса  $R$ . Это тождественно тому, что три указанные кривые в точке  $O_1$  имеют одинаковые производные первого (в данном случае нулевые) и второго порядка. Следовательно, кинематическая парабола, аппроксимирующая гиперболу в окрестности начальной точки  $O_1$  (в нерелятивистской области), имеет тождественный “параболический радиус” в координатах Минковского исходя из соотношения:

$$\chi = g \cdot t^{(1)2} / 2 = [c \cdot t^{(1)}]^2 / 2 \bar{R}.$$

\* \* \*

В тригонометрической форме представляются и динамические релятивистские характеристики. С использованием дифференциальных соотношений одновременности (84А), (85А) для общего случая поступательного физического движения материального тела устанавливаются тригонометрические скалярные, векторные и тензорные координатные отображения для его инерционной массы, импульса и энергии с точки зрения наблюдателя в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . При математическом описании поступательного физического движения материального тела последнее сводится к таковому для его центра массы как некоторой абстрактной материальной точки. Согласно 2-му закону механики Ньютона, имеем:

$$\begin{aligned} F = F_\tau(\tau) &= m_0 \cdot \frac{dv^{(m)}}{d\tau} = \frac{d[m_0 \cdot v^{(m)}]}{d\tau} = \frac{dp^{(m)}}{d\tau} = m_0 \cdot g(\tau) = m_0 c \cdot \frac{g(\tau)}{c} = m_0 c \cdot \frac{dy}{d\tau} \equiv \\ &\equiv m_0 c \cdot \frac{ch \gamma dy}{dt^{(1)}} = \frac{d(m_0 c \cdot sh \gamma)}{dt^{(1)}} = \frac{d[(ch \gamma \cdot m_0) \cdot (th \gamma \cdot c)]}{dt^{(1)}} = \frac{d(mv)}{dt^{(1)}} = \frac{dp}{dt^{(1)}} = F_t(t^{(1)}). \end{aligned}$$

(Причём в первой вышеуказанной форме только для мгновенного собственного псевдодекартового базиса, где  $m = m_0 = \text{const.}$ ) Это ковариантная форма 2-го закона Ньютона, где одна и та же собственная сила  $F$  в системах  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_m$  определяется исходя из одновременности, согласно (84А), (85А), в одной и той же мировой точке массы  $M$ . Мощность от действия собственной силы также в форме механики Ньютона в  $\tilde{E}_1$  выражается в виде:

$$N = F \cdot v = m_0 c \cdot v \cdot \frac{ch \gamma dy}{dt^{(1)}} = \frac{d(m_0 c^2 \cdot ch \gamma)}{dt^{(1)}} = \frac{d(mc^2)}{dt^{(1)}} = \frac{dE}{dt^{(1)}}.$$

(Оба уравнения в физической форме впервые получены Пуанкаре [39].)

Отсюда далее в  $\tilde{E}_1$  определяются скалярные значения релятивистских динамических характеристик: полной массы  $m = ch \gamma \cdot m_0$ , кинематического импульса  $p = mv = m_0 v^* = sh \gamma \cdot m_0 c = sh \gamma \cdot P_0$ , полного импульса  $P = mc = ch \gamma \cdot P_0$  и полной энергии  $E = mc^2 = ch \gamma \cdot m_0 c^2 = ch \gamma \cdot E_0$ . Следовательно, скалярные значения полных массы, импульса и энергии суть косинусные гиперболические проекции собственных характеристик:

$$m = ch \gamma \cdot m_0 = \sqrt{m_0^2 + (p/c)^2} \approx m_0 + m_0 v^{*2}/2c^2 \approx m_0 + m_0 v^2/2c^2,$$

$$mc = P = ch \gamma \cdot P_0 = \sqrt{P_0^2 + p^2} \approx P_0 + m_0 v^{*2}/2c \approx P_0 + m_0 v^2/2c,$$

$$mc^2 = E = ch \gamma \cdot E_0 = \sqrt{E_0^2 + (pc)^2} \approx E_0 + m_0 v^{*2}/2 \approx E_0 + m_0 v^2/2.$$

Причём первые приближённые значения ограничивают характеристики сверху, а вторые – снизу, что следует из тригонометрического неравенства

$$1 + \operatorname{th}^2 \gamma/2 < \operatorname{ch} \gamma < 1 + \operatorname{sh}^2 \gamma/2.$$

Указанные три релятивистские *полные* характеристики имеют одинаковое теоретическое значение, так как они прямо пропорциональны друг другу. В состоянии относительного покоя (при  $r = 0$ ) любой материальный объект имеет собственный импульс  $P_0 = m_0 c$  и собственную эйнштейнову энергию  $E_0 = m_0 c^2$ . Происхождение этой пары динамических характеристик материального тела (*в состоянии относительного покоя*) может объяснить постулат, согласно которому все материальные объекты совершают перманентное движение в  $\langle P^{3+1} \rangle$  вдоль своих мировых линий с постоянной псевдоскоростью «с». (Подробнее это обсуждается в последней главе 10А.)

К вышеуказанным скалярным значениям динамических характеристик привели изначальные законы классической механики Ньютона, записанные с учётом релятивистского сложения скорости физического движения. В тригонометрической трактовке понятию “физическая скорость” отвечают гиперболический угол движения и его тригонометрические функции.

Но последние в релятивистском смысле имеют *тензорный* характер. Они представляются в  $\langle P^{3+1} \rangle$  как двухвалентные тензоры в целом и как одновалентные тензоры – векторы в виде смешанных проекций. Следовательно, для тех же динамических характеристик в теории относительности наряду со скалярными существуют векторные и тензорные формы, получаемые соответствующей модификацией вышеприведённых уравнений механики Ньютона. Матрица гиперболического ротационного преобразования (364), (31A) в  $\tilde{E}_1$  имеет вид:

$\operatorname{roth} \Gamma$

$\operatorname{ch} \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_a \overrightarrow{\mathbf{e}}_a' + \overrightarrow{\mathbf{e}}_a \overleftarrow{\mathbf{e}}_a'$	$\operatorname{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_a$
$\operatorname{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_a'$	$\operatorname{ch} \gamma$

Это *гиперболически ортогональный тригонометрический тензор движения*. Если вышеуказанный материальный объект с точки зрения наблюдателя в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  совершает поступательное физическое движение с мгновенной скоростью  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_a = c \cdot \mathbf{th} \gamma = c \cdot \operatorname{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_a$  или  $\mathbf{v}^* = v^* \cdot \mathbf{e}_a = c \cdot \mathbf{sh} \gamma = c \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_a$ , то в том же базисе определяются три мгновенных *сопутствующих тензора*:

тензор полной инерционной массы, тензор полного импульса и тензор полной энергии (плюс их смешанные векторные проекции):

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{T}_m = m_0 \cdot \text{roth } \Gamma, \\ \mathcal{T}_p = m_0 c \cdot \text{roth } \Gamma, \\ \mathcal{T}_E = m_0 c^2 \cdot \text{roth } \Gamma, \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}/c = m_0 \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a, \\ \mathbf{p} = m_0 c \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a = m_0 \mathbf{v}^* = m \mathbf{v}, \\ \mathbf{p}c = m_0 c^2 \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a. \end{array} \right\}$$

Например, последний из указанных известен как *тензор энергии-импульса*. В физической форме в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  он определяется в виде

$$\begin{array}{|c|c|} \hline E \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{e}_a} \overleftrightarrow{\mathbf{e}_a}' + E_0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_a} \overleftarrow{\mathbf{e}_a}' & \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \\ \hline p' \cdot \mathbf{c} & E \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline mc^2 \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{e}_a} \overleftrightarrow{\mathbf{e}_a}' + m_0 c^2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_a} \overleftarrow{\mathbf{e}_a}' & v^* \cdot m_0 c^2 \\ \hline v^* \cdot m_0 c^2 & mc^2 \\ \hline \end{array}.$$

В свою очередь, этот  $4 \times 4$ -тензор проективно расщепляется (§ 11.3) на  $3 \times 3$ -тензор (проекция на евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ ), скаляр (проекция на стрелу времени  $\vec{ct}^{(1)}$ ) и пару сопряжённых векторов (смешанные проекции). В мгновенном собственном базисе этот двухвалентный тензор является абсолютным инвариантом  $E_0 \cdot I = m_0 c^2 \cdot I$ .

С другой стороны, физические характеристики, подвергаемые лоренцеву сокращению, вычисляются в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  через деформационную матрицу-тензор (365), (31A), которая в нём имеет вид:

$\text{defh } \Gamma$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{sch } \gamma \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{e}_a} \overleftrightarrow{\mathbf{e}_a}' + \overrightarrow{\mathbf{e}_a} \overleftarrow{\mathbf{e}_a}' & -\text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_a \\ \hline + \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_a' & \text{sch } \gamma \\ \hline \end{array}.$$

По существу это есть *сферически квазиортогональный тензор деформации* в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ . Отметим, что релятивистское возрастание массы движущегося тела имеет также чисто *кажущуюся* – координатную природу. С учётом лоренцева сокращения объёма (40А) формальная *координатная плотность* тела возрастает ещё более. Но это вовсе не означает, что на тело в движении действуют какие-либо дополнительные сжимающие силы. Последние как собственные определялись бы одинаково в любых инерциальных системах отсчёта, в том числе в мгновенном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_m$ . В тригонометрической трактовке СТО все релятивистские преобразования физических величин определяются операциями с вышеуказанными тензорами движения и деформации.

Заметим также, что через соотношения (80А), (81А) устанавливается релятивистский аналог формулы Циолковского для ракеты, движущейся за счёт внутренней реактивной силы:

$$F = m_0(\tau) \cdot g(\tau) = u \cdot \frac{dm_0(\tau)}{d\tau},$$

$$u \cdot \frac{dm_0(\tau)}{m_0(\tau)} = g(\tau) d\tau = c d\gamma(\tau),$$

$$m_0(\tau) = m_0 \cdot \exp[-\frac{c}{u} \cdot \gamma(\tau)],$$

где  $m_0$  и  $m_0(\tau)$  – начальная и мгновенная масса ракеты,  $u$  – скорость истечения реактивного топлива,  $\gamma(\tau) = \operatorname{Arth} [v(\tau)/c]$ . Для гипотетической фотонной ракеты ( $u = c$ ) имеем:

$$m_0(\tau) = m_0 \cdot \exp[-\gamma(\tau)].$$

В сравнении с классическим вариантом Циолковского, вышеуказанная релятивистская формула даёт остаточную массу ракеты меньше исходя из достигнутой координатной скорости и больше исходя из достигнутой собственной скорости:

$$m_0 \cdot \exp(-v^*/u) < m_0(\tau) < m_0 \cdot \exp(-v/u), \text{ или } \operatorname{sh} \gamma > \gamma > \operatorname{th} \gamma.$$

\* \* \*

В качестве конкретного примера для иллюстрации, в том числе и парадокса близнецов, рассмотрим тригонометрические выкладки для гиперболического движения ракеты с реверсом, схема которого приведена на рис. 3А. (Подобные примеры впервые рассматривал Ланжевен [58].)

$$\chi = L/2 = c^2/g \cdot (\operatorname{ch} \gamma_{\max} - 1) \rightarrow \operatorname{ch} \gamma_{\max} = g \cdot \chi / c^2 + 1 = \chi / R + 1;$$

$$\tau = (4c/g) \cdot \gamma_{\max}, \quad t^{(1)} = (4c/g) \cdot \operatorname{sh} \gamma_{\max};$$

$$v_{\max} = c \cdot \operatorname{th} \gamma_{\max}, \quad v_{\max}^* = c \cdot \operatorname{sh} \gamma_{\max};$$

$$m_0(\tau)/m_0 = \exp[(-4c/u) \cdot \gamma_{\max}].$$

Полёт фотонной ракеты до окрестности ближайшей звезды “Проксима Центавра” и обратно в вышеуказанном идеальном режиме характеризуется следующими параметрами:

- расстояние в одну сторону  $L \approx 4,26$  световых лет  $\approx 40,3 \cdot 10^{15}$  м,
- внутреннее ускорение  $g = 10$  м/сек<sup>2</sup>,
- скорость истечения топлива  $u = c$ ;

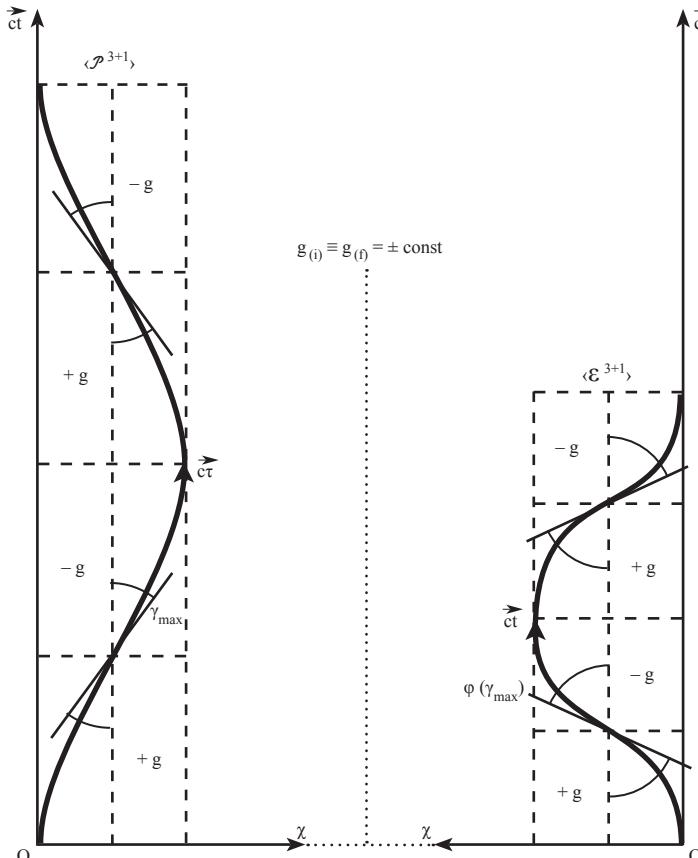
– результаты вычислений

$$\chi \approx 20,15 \cdot 10^{15} \text{м}, \quad R \approx 9 \cdot 10^{15} \text{м}, \quad t_F \approx 305 \text{ суток};$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{\max} \approx 3,239; \quad \operatorname{sh} \gamma_{\max} \approx 3,081; \quad \operatorname{th} \gamma_{\max} \approx 0,951; \quad \gamma_{\max} \approx 1,8437;$$

$$v_{\max} \approx 0.951c, \quad v^*_{\max} \approx 3,061c,$$

$$\tau \approx 2.21 \cdot 10^8 \text{ сек} \approx 7 \text{ лет}, \quad t^{(1)} \approx 3,70 \cdot 10^8 \text{ сек} \approx 11,7 \text{ лет.}$$



**Рис. 3А.** Реверсивное гиперболическое движение материальной точки в псевдодекартовых (слева) и в квазидекартовых (справа) координатах под действием постоянного внутреннего ускорения или эквивалентного гравитационного поля с постоянной напряжённостью.

В данном случае время в световых годах, выражющее в астрономическом масштабе покрытое расстояние туда и обратно, даже больше затрачиваемого собственного времени. Относительное снижение массы фотонной ракеты (только за счёт расхода топлива) по релятивистской формуле составляет:  $m_0(t)/m_0 = \exp(-4\gamma_{\max}) \approx 1/1600$ .

Фотонная ракета с земным внутренним ускорением теоретически менее чем за год достигнет собственной скорости «с» и в конце разгона превысит её трёхкратно. Однако по завершении этой гипотетической экспедиции от первоначальной снаряжённой массы ракеты должна остаться совершенно ничтожная часть, что красноречиво свидетельствует об умозрительности путешествий даже к ближайшим звёздным системам за вышеуказанные порядки времён с использованием релятивистских эффектов СТО.

\* \* \*

В общем случае неравномерного, но опять-таки *прямолинейного* физического движения определяются мгновенные характеристики искривления мировой линии по касательным к ней гиперболе (в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ) или гиперболической косинусоиде (в  $\langle E^{3+1} \rangle$ ) в какой-либо точке М. При таком типе движения мировая линия в целом находится в объемлющей псевдоплоскости или квазиплоскости.

Как и в случае идентичной касательной *окружности* к каким-либо регулярным кривым (в одной точке), для идентичных касательных *гиперболы* и гиперболической *косинусоиды* справедливо одно общее утверждение. А именно кривые с такого рода идентичными касательными в точке М имеют в ней же тождественные производные первого и второго порядка, выраженные в соответствующей соприкасающейся плоскости, псевдоплоскости, квазиплоскости.

Радиус гиперболической кривизны в соприкасающейся  $\langle P^{1+1} \rangle$  направлен по вектору псевдонормали  $\bar{\mathbf{p}}$  от центра касательной гиперболы. Радиус сферической кривизны в соприкасающейся  $\langle E^{1+1} \rangle$  направлен по вектору квазинормали  $\bar{\mathbf{q}}$  к центру касательной окружности. Вектор касательной  $\mathbf{i}$  псевдоортогонален  $\bar{\mathbf{p}}$  и квазиортогонален  $\bar{\mathbf{q}}$ . Все эти векторы суть единичные в своей метрике. Общий математический критерий плоского типа кривой, а следовательно, и вышеуказанного типа мировой линии есть нулевое кручение при ненулевой кривизне.

Пусть координаты точек мировой линии фиксируются в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в заданном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . Относительно него *простое* прямолинейное физическое движение материального тела определяется тем, что характеристический угол движения  $\gamma$  имеет постоянный вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_a$  именно в  $\tilde{E}_1^{(3)}$ . Тогда объемлющая псевдоплоскость обязательно содержит в себе стрелу времени  $\overleftrightarrow{ct}^{(1)} = \overleftrightarrow{ct}$ .

Ей отвечает пространственная ось  $\chi$ . Она, касательная  $\mathbf{i}$  и псевдонармаль  $\bar{\mathbf{p}}$  имеют одинаковый вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_\alpha$ . Собственная ось  $\chi$  образует угол  $\gamma$  с вектором  $\bar{\mathbf{p}}$  и угол  $\varphi(\gamma)$  с вектором  $\bar{\mathbf{q}}$ . Те же углы образует вектор  $\mathbf{i}$  с осью  $\vec{ct}$  в псевдоплоскости и с осью  $\vec{ct}$  в квазиплоскости. Из общих тригонометрических соображений вычисляем все определяющие характеристики касательных кривых.

Для касательной гиперболы в объемлющей псевдоплоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\bar{R} = \frac{|\mathrm{d}\gamma|}{\mathrm{d}ct} = \frac{\mathrm{d} \operatorname{Arth} \left| \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}ct} \right|}{\sqrt{\mathrm{d}ct^2 - \mathrm{d}\chi^2}} = \frac{\left| \frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}ct^2} \right|}{\left[ 1 - \left( \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}ct} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{\mathrm{d}^2x^{(m)}}{\mathrm{d}ct^2}, \\ \chi_R = \chi - \operatorname{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{R}}, \quad \left| \operatorname{th} \gamma = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}ct} \right. \\ ct_R = ct - \operatorname{sh} \gamma \cdot \bar{\mathbf{R}}, \quad \left| \operatorname{sh} \gamma = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}ct} \right. \end{array} \right. \quad (102A)$$

Для касательных косинусоиды и окружности в объемлющей квазиплоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\bar{R} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot 1/\bar{r} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(\gamma)}{\mathrm{d}ct} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot \frac{\mathrm{d} \operatorname{arctg} \left| \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}ct} \right|}{\sqrt{\mathrm{d}ct^2 + \mathrm{d}\chi^2}} = \frac{\left| \frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}ct^2} \right|}{\sqrt{1 + \left( \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}ct} \right)^2}}, \\ 1/\bar{r} = \frac{\left| \frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}ct^2} \right|}{\left[ 1 + \left( \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}ct} \right)^2 \right]^{3/2}} = \left| \frac{\mathrm{d}^2x^{(m)}}{\mathrm{d}ct^2} \right|. \\ \chi_R = \chi - \operatorname{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{R}}, \quad \left| \chi_r = \chi + \cos \varphi(\gamma) \cdot \bar{\mathbf{r}} \right. \\ ct_R = ct - \gamma \cdot \bar{\mathbf{R}}, \quad \left| ct_r = ct - \sin \varphi(\gamma) \cdot \bar{\mathbf{r}} \right. \end{array} \right. \quad (103A)$$

Аналогичным образом вычисляются касательные гиперболы и меридианные (большие) окружности к простым относительно  $\tilde{E}_1$  плоским кривым в пространствах  $\langle P^{2+1} \rangle$  и  $\langle Q^{2+1} \rangle$  в гиперболической и в сферической неевклидовых геометриях.

Вообще же тригонометрические формулы

$$1/\bar{R} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\hat{\nu}}, \quad 1/\bar{r} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu} \quad (104A)$$

применимы и в частных дифференциалах для плоских и закрученных кривых, но с условием  $\mathbf{e}_\alpha = \text{const.}$  (См.: о разложении абсолютной кривизны на две взаимно-ортогональные компоненты в гл. 10А.)

## **Глава 6А. Изоморфное отображение псевдоевклидова пространства в квазиеуклидово и в сжатое квазиеуклидово пространства**

Пространство, само по себе, без движущейся в нём материи не имеет какого-либо физического смысла. Это всего лишь та или иная математическая абстракция, приспособленная для описания в удобной форме законов движения материи координатным способом. При наложении на формы этих законов каких-либо ограничений, например требования ковариантности, выбор допустимого координатного пространства становится более определённым. В предыдущей главе, согласно (97А), было введено *специальное* квазиеуклидово пространство  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  относительно заданного  $\tilde{E}_1$ . Его гносеологическое значение может состоять в том, что в нём достаточно наглядно представляются разнообразные варианты релятивистских путешествий в объективной оценке самого путешественника  $N$  (но не его как простого наблюдателя). В такой объективной оценке евклидова составляющая пространства-времени в целом остаётся неизменной. В свою очередь, стрела текущего собственного времени путешественника  $N$  перманентно сферически ортонормируется по отношению к  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle^{(1)}$ . При этом она же оказывает перманентное воздействие на  $\vec{ct} = \vec{ct}^{(1)}$ , что выражается в конкретной мировой линии наблюдателя  $N_1$  в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ . Следовательно, для каждого возможного варианта путешествия есть свой отклик в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  виде мировой линии – стрелы времени  $\vec{ct}$ , в общем случае криволинейной. Квазидекартовы координаты точек этой мировой линии фиксируют затраченное собственное время  $ct$  путешественника  $N$  и покрытое им собственное расстояние  $\chi$ , измеряемое синхронно с наблюдателем  $N_1$  в универсальном базисе. Условие синхронизации событий в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  всегда одно и то же: параллельность множества мировых точек постоянному подпространству  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , что отвечает соотношению (85А). Евклидова длина мировой линии равна здесь затраченному координатному времени  $ct$ .

В данном аспекте  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  формально синтезируется только из времениподобной составляющей векторного пространства  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Например, в координатах  $\langle \chi, \vec{ct} \rangle$  (рис. 2А) линия или вектор с любым наклоном отображает только временнóй процесс, то есть

это всегда мировая линия. (Возможно аналогичное *всеобъемлющее* преобразование  $\langle P^{3+1} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  совместно с конкретными геометрическими объектами.) В ином аспекте  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  синтезируется только из пространствуподобной составляющей векторного  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В этом специальном квазиеуклидовом пространстве все линии и векторы пространствуподобны. Особый интерес представляют такие преобразования исходного пространства совместно с гиперболоидами I и II.

Гиперболоид I как геометрическое место времениподобных гиперболических кривых  $\vec{ct}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  преобразуется в цилиндрическую поверхность в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , образующие которой – те же спрямлённые гиперболы  $\vec{ct}$ . С другой стороны, исходный цилиндр из кругового множества осей  $\vec{ct}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  преобразуется в *катеноид* I в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  как геометрическое место времениподобных косинусоидных кривых  $\vec{ct}$ . Катеноид I – односвязная (*минимальная*) гиперповерхность, получаемая вращением времениподобной гиперболической косинусоиды вокруг централизованной оси  $\vec{ct}_R$ .

Аналогичное преобразование гиперболоида II как геометрического места пространствуподобных гиперболических кривых даёт *катеноид* II – двухсвязную гиперповерхность в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ . Он получается вращением пространствуподобной гиперболической косинусоиды вокруг оси  $\vec{ct}$ . В данном случае стрела времени остаётся неизменной, а преобразуются только пространственные оси с сохранением их вектора направляющих косинусов.

Между гиперболоидами I, II и катеноидами I, II устанавливается изоморфизм на основе равенства либо пространственных координат (в первом случае), либо временной координаты (во втором случае). Но более того, геометрию гиперболоида I возможно реализовать на изометричной ему гиперповерхности в некотором объемлющем специальном квазиеуклидовом пространстве  $\{\langle \mathcal{E}^{n+1} \rangle\}$ . Для этого осуществим дальнейшее изоморфное преобразование катеноида I.

Как известно, эволвента гиперболической косинусоиды  $\vec{ct}$  (цепной линии) есть *трактиса*. Причём при развёртке косинусоиды её евклидова длина  $\vec{ct}$  переносится на нормаль трактисы. Вместе с тем, текущий нормальный вектор трактисы тождествен текущему касательному вектору гиперболической косинусоиды как вектор-расстояние между двумя указанными кривыми [рис. 2A (4)]. Формально это означает спрямление криволинейной стрелы времени  $\vec{ct}$  в текущую нормаль  $\vec{ct}$  трактисы с соответствующей ей длиной. В процессе вышеуказанного вращения времениподобной косинусоиды вокруг централизованной оси  $\vec{ct}_R$  вместе с сопутствующей времениподобной трактисой внутри катеноида I дополнительно производится гиперпсевдосфера Бельтрами. (Заметим, что при этом трактиса считается непрерывной кривой.)

Все четыре указанные поверхности вращения: гиперболоид I, цилиндр, катеноид I и гиперпсевдосфера – гомеоморфны и имеют один и тот же характеристический параметр  $R$  (радиус вращения). Но среди них только гиперболоид I и гиперпсевдосфера Бельтрами имеют одну и ту же – постоянную и отрицательную *гауссову кривизну*. Последнее обстоятельство, согласно *теореме Бельтрами*, определяет гиперболическую неевклидову метрику на таких поверхностях, или метрику Ламберта. Как известно, гомеоморфизмы и изометричность в малом каких-либо поверхностей необходимы и достаточны для изометричности в большом, то есть для изоморфности их внутренних геометрий в целом.

Отсюда следует главный вывод. *Цилиндрическая гиперболическая неевклидова геометрия* ( $\S$  12.3) изоморфна в целом геометрии Бельтрами на вещественной непрерывной гиперпсевдосфере при одном и том же характеристическом радиусе  $R$ .

В данном изометричном отображении ( $n - 1$ )-мерный центральный пояс (или *экватор*) гиперболоида I и гиперпсевдосферы суть автоморфизмы. Фигуры, проходящие в процессе движения через него на гиперпсевдосфере Бельтрами претерпевают излом под углом  $180^\circ$ , что не отражается на их метрических и топологических свойствах.

Далее установим, как преобразуются координаты в процессе трансформации гиперболоида I в гиперпсевдосферу Бельтрами. Асимптотическая ось  $\vec{ct}_R$  образующих траекторий (собственная ось вращения гиперпсевдосферы) параллельна  $\vec{ct}$  [рис. 2A (4)]. Ось  $\chi_R$  траекторий направлена противоположно оси  $\chi$  – к центру вращения  $O$  на оси  $\vec{ct}_R$ , но имеет тот же вектор направляющих косинусов. Точка *возврата* траектории  $O_1$  отображает центральную точку гиперболы и поэтому также принадлежит кривой. При  $\Delta ct > 0$ :  $v$  и  $\gamma > 0$  в верхней и нижней частях, а в точке возврата они нулевые ( $\bar{g} = \text{const} > 0$ ). Из тригонометрических соображений и с учётом (89А), (94А) текущие координаты ответной точки  $M'$  траектории выражаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \chi_R &= \sin \varphi (\gamma) \cdot ct - \chi \equiv \operatorname{th} \gamma \cdot ct - \chi = \operatorname{sch} \gamma \cdot \chi, \\ ct_R &= ct - \cos \varphi (\gamma) \cdot ct \equiv ct - \operatorname{sch} \gamma \cdot ct = [1 - (\operatorname{th} \gamma) / \gamma] \cdot ct, \end{aligned} \right\} \quad (105 \text{ A})$$

где функции  $\operatorname{sch} \gamma$  и  $\operatorname{th} \gamma / \gamma$  при движении вдоль кривой монотонно убывают от 1 до 0. Они вносят соответствующие уменьшающие коэффициенты в непрерывные отображения  $\chi \xrightarrow{\gamma} \chi_R$ ,  $ct \xrightarrow{\gamma} ct_R$ , в результате чего исходная гипербола преобразуется в траекторию. Поэтому  $\chi_R$  и  $ct_R$  определяются как *сжатые координаты* собственного расстояния и собственного времени;  $\langle \mathcal{E}^{n+1} \rangle$  определяется как *специальное сжатое квазиеуклидово пространство*, объемлющее псевдосферу Бельтрами.

Применив далее формулы гиперболического движения (86А), (87А), приводим соотношения (105А) к полной тригонометрической форме и вместе с этим вычисляем евклидово расстояние  $l_R$  вдоль трактрыс:

$$\begin{aligned} \chi_R &= R \cdot y = R \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma), \\ c\tau_R &= R \cdot z = R \cdot (\gamma - \operatorname{th} \gamma), \\ l_R &= R \cdot \iota = R \cdot \ln \operatorname{ch} \gamma, \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \frac{d c\tau_R}{d \chi_R} &= \frac{d z}{d y} = \operatorname{sh} \gamma \equiv \operatorname{tg} \varphi(\gamma), \\ d l_R &= dx^{(m)} = R \cdot \operatorname{th} \gamma \, dy = v \, dt. \end{aligned} \right\} \quad (106A)$$

Из этих параметрических уравнений следует, что *все трактрысы подобны между собой*, аналогично окружностям и равнобочным гиперболам. Множитель «R» есть коэффициент подобия как для гипербол, так и для трактрыс. Уравнения для единичной трактрысы в явной и параметрической формах выражаются в виде:

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Arch} \frac{1}{u} - \sqrt{1 - u^2}, \\ \iota &= -\ln u, \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} u &= 1 - y = \operatorname{sch} \gamma \leq 1, \\ (u_R &= R \cdot \operatorname{sch} \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (107A)$$

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sch} \gamma \equiv \cos \varphi(\gamma), \\ z &= \gamma - \operatorname{th} \gamma \equiv \operatorname{Arth} \sin \varphi(\gamma) - \sin \varphi(\gamma), \\ \iota &= \ln \operatorname{ch} \gamma \equiv \ln \sec \varphi(\gamma). \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (108A)$$

Для сравнения укажем параметрические уравнения *сферической циклоиды*:

$$\begin{aligned} u &= \cos \varphi, \\ z &= \varphi - \sin \varphi, \\ \iota &= 4 \cdot (1 - \cos \varphi/2), \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} u_R &= R \cdot u, \\ z_R &= R \cdot z, \\ l_R &= R \cdot \iota. \end{aligned} \right\}$$

Циклоиды также подобны между собой. Следовательно, по сути *трактриса есть гиперболический аналог циклоиды, но с одним циклом*.

В “фокальной” точке трактрысы, отвечающей  $\gamma = \omega = \operatorname{Arsh} 1 \approx 0,881$ :

$$u_F = \sqrt{2/2} \approx 0,707 \quad (y_F = 1 - \sqrt{2/2}), \quad z_R = \omega - \sqrt{2/2} \approx 0,174, \quad l_F = \ln 2; \quad \left( \frac{dz}{dy} \right)_F = 1.$$

Из этих же соотношений для неё вытекает *неравенство прямоугольного треугольника*:

$$(1 - \operatorname{sch} \gamma) + (\gamma - \operatorname{th} \gamma) > \ln \operatorname{ch} \gamma > \sqrt{(1 - \operatorname{sch} \gamma)^2 + (\gamma - \operatorname{th} \gamma)^2},$$

$$(dy + dz > d\iota > \sqrt{dy^2 + dz^2}).$$

Формально скорость равноускоренного движения в сжатых координатах, согласно (106А), выражается соотношением:

$$\frac{d\chi_R}{d\tau_R} = c/\operatorname{sh} \gamma = \operatorname{cosh} \gamma \cdot c = c^2/v^*,$$

то есть в процессе движения она изменяется от  $\infty$  до 0.

Кроме того, из (106А) и (105А) получаются предельные формулы:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_R = R; \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (ct - ct_R) = R; \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\ell_R - ct_R) = R \cdot (1 - \ln 2);$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (ct - \ell_R) = R \cdot \ln 2 \quad (ct > \ell_R > ct_R).$$

Отсюда, в частности, следует, что в процессе равноускоренного движения какой-либо материальной точки, согласно его описанию в сжатых координатах, её мировая точка асимптотически приближается к оси  $\vec{ct}_R$  [рис. 2А(4)].

Ввиду того, что гиперпсевдосфера Бельтрами получается вращением радиуса  $R$  трактисы относительно своей асимптоты – оси  $\vec{ct}_R$ , то ортогонально ей она имеет тот же коэффициент подобия « $R$ ». Следовательно, все гиперпсевдосфераe Бельтрами подобны между собой в объемлющем квазивклидовом пространстве  $\{\langle E^{n+1} \rangle\}$  аналогично гиперсферам в  $\langle E^{n+1} \rangle$  и гиперболоидам Минковского в  $\langle P^{n+1} \rangle$ .

Гиперпсевдосфера Бельтрами получается вращением трактисы с числом степеней свободы ( $n - 1$ ). Главные радиусы её сферической кривизны:

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = -R \cdot \operatorname{sh} \gamma \equiv -R \cdot \operatorname{tg} \varphi(\gamma) = -R \cdot \operatorname{ctg} \xi = -R \cdot c/v^* \\ \text{– по меридианам (трактисам),} \\ R_2 = +R \cdot \operatorname{sh} \gamma = u_R/\operatorname{th} \gamma \equiv u_R/\sin \varphi(\gamma) = u_R/\cos \xi = R \cdot v^*/c \\ \text{– по локальным параллелям (ортогональным дугам)} \end{array} \right\} \quad (109A)$$

$$(R_{1_F} = -R, \quad R_{2_F} = +R; \quad \varphi_F = \pi/4).$$

Здесь  $\xi = (\pi/2 - \varphi)$  – угол между нормалью  $\vec{ct}$  к поверхности и локальным радиусом вращения  $u_R$ , согласно теореме Менье. Он же, согласно (26А), есть угол параллельности Лобачевского, но в геометрии Бельтрами. Меридианы и локальные параллели псевдосферы используются в качестве геодезических (нормальных) криволинейных координат в её внутренней геометрии. Гауссова кривизна псевдосферы выражается в виде:

$$K_G = 1/R_1 \cdot 1/R_2 = -1/R^2 = \operatorname{const} < 0.$$

Это, согласно *теореме Бельтрами*, определяет на поверхности гиперпсевдосферы гиперболическую метрику Ламберта, или метрику геометрии Лобачевского – Больяи.

С другой стороны, главные радиусы псевдокривизны гиперболоида I Минковского (гиперболической и сферической) постоянны по всей его поверхности:

$R_1 = -R$  – по меридианам (гиперболам),

$R_2 = +R$  – по локальным параллелям (ортогональным дугам).

Соответственно эти меридианы и локальные параллели могут использоваться в качестве геодезических (псевдоортогональных) криволинейных координат в его внутренней геометрии.

В геометрии Лобачевского – Больяи « $R$ » есть некий вселенский параметр, или константа *Гаусса – Швейкарта*. Он характеризует степень искривления пространства Лобачевского – Больяи по отношению к плоскому евклидову пространству. Он же есть радиус гипотетической мнимой сферы Ламберта – Тауринуса, воплощённой впоследствии в гиперболоиде II Минковского. Обратим внимание на то, что гиперболоид II (верхний) повсюду вогнут и его радиус псевдокривизны постоянен во всех точках, как для сферы. А именно он равен « $+iR$ ». Изначальная идея Ламберта и последующее её развитие Тауринусом исторически открывали наиболее простой и естественный путь к реализации полноценной гиперболической неевклидовой геометрии – таковой на *сфере мнимого радиуса*. Этот путь стал возможен к реализации в полном объёме после открытия Пуанкаре и Минковским псевдоевклидова пространства с целью его применения в теории относительности.

Зоммерфельд (1909 г.) впервые установил гиперболический характер закона сложения скоростей в СТО, рассмотрев его действие как бы на сфере мнимого радиуса для случаев двух коллинеарных и двух ортогональных скоростей [62]. Варичак (1910 г.) сделал предположение о тождественности закона сложения скоростей и правила сложения отрезков в геометрии Лобачевского – Больяи [65]. Теоретическое обоснование этому дал Клейн, доказав изоморфизм группы Лоренца и группы однородного движения в пространстве Лобачевского – Больяи. Он же дал трактовку гиперболической геометрии в псевдоевклидовом пространстве Минковского – на гиперболоиде II [37, с. 111; 25; 26].

Сценарий дальнейшего развития событий в данной области исследований был предопределён. Решающую роль в понимании того, что различные способы построения одной и той же неевклидовой геометрии приводят к тождественным конечным результатам сыграли классические проективные модели Клейна и Пуанкаре. Отсюда на первый план выходит выбор наиболее простого и наглядного способа аналитического изучения неевклидовых геометрий вообще.

В данной монографии для изучения движений и деформаций в гиперболической и в сферической неевклидовых геометриях применяются относительно простые средства *квадратичной тензорной тригонометрии*. Тригонометрический подход к данной проблеме (в скалярной форме) был применён впервые именно в изначальных классических работах Пуанкаре и Минковского по СТО. Неевклидовы геометрии рассматриваются здесь *внешним образом* – с позиции тензорных тригонометрий объемлющих линейных метрических пространств  $\langle P^{n+1} \rangle$  и  $\langle Q^{n+1} \rangle$ . При этом используются соответствующие линейные тригонометрические преобразования ротационного (синусно-косинусного) и деформационного (тангенсно-секансного) типа в элементарных формах.

Кроме того, такая *внешняя* точка зрения позволяет, в принципе, изучать движения в любых многомерных геометриях с постоянной кривизной (в гиперболических – с отрицательной и в сферических – с положительной) в наиболее общем виде. Такого рода геометрии присущи собственному гиперболоиду в  $\langle P^{n+q} \rangle$  и собственному гиперсфериоду в  $\langle Q^{n+q} \rangle$  при  $q \geq 1$ . Для них ротационные и деформационные тригонометрические преобразования применяются в самых общих формах, изложенных в основной части монографии. В частности, каждому рефлектор-тензору объемлющего пространства отвечают собственные множества псевдоевклидовых и квазиевклидовых тригонометрических ротаций (рефлексий), а также их общее подмножество ортосферических ротаций (рефлексий).

## Глава 7А. Тригонометрические модели неколлинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии

Продолжим изучение двух- и многоступенчатых гиперболических ротаций – движений, но уже не обязательно в пределах одной и той же псевдоплоскости. Как и ранее (§ 11.3), для анализа многоступенчатых, но теперь элементарных ротаций применяется полярное разложение итогового преобразования типа (474), (475). Напомним, что в этом разложении одна и та же сферическая ротационная матрица всегда выражается в базисе своего действия. Согласно (497), она имеет общую структуру, отвечающую рефлектор-тензору псевдоевклидова пространства Минковского по следующей схеме:

$$\begin{array}{c} \text{rot } \Theta \qquad \qquad I^{\oplus} \\ \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline \{\text{rot } \Theta\}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}' & 1 \\ \hline \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline I_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}' & -1 \\ \hline \end{array} \right] \end{array} \quad (110A)$$

В свою очередь, гиперболическая ротационная матрица  $\text{roth } \Gamma$  в базисе своего действия, как и в любом другом собственном универсальном базисе, имеет каноническую форму (363). Здесь фигурируют тензорные углы:  $\Gamma$  – угол гиперболической ротации;  $\Theta$  – угол ортосферической ротации (ортогональной по отношению к  $\Gamma$ ), согласно их определению в (349). Все они отвечают заданному рефлектор-тензору пространства.

Вначале рассмотрим двухступенчатую элементарную гиперболическую ротацию с целью наиболее общего – матричного вывода закона суммирования двух движений (скоростей) в скалярной, векторной и тензорной формах. Новый псевдодекартов базис представляется различными способами с учётом (486) и (491) в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 &= \{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12}^{-1}\}_{\tilde{E}_1} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1 = \\ &= \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \tilde{E}_1 = T \cdot \tilde{E}_1 = \\ &= \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{roth } \tilde{\Gamma}_{13} \cdot \tilde{E}_1. \end{aligned} \quad (111A)$$

Матрицы roth  $\Gamma_{12}$  и roth  $\Gamma_{13}$  выражены и действуют в  $\tilde{E}_1$ . Матрица roth  $\Gamma_{23}$  исходно выражена и действует в  $\tilde{E}_{2h} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1$ . Матрица rot  $\Theta_{13}$  в первом случае выражена и действует в гиперболически смешённом базисе  $\tilde{E}_{3h} = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \tilde{E}_1$ . Во втором случае она выражена и действует в исходном базисе  $\tilde{E}_1$ . Как было показано в § 10.4, при многоступенчатых движениях в формулах активных преобразований координат базисов или элементов пространства применяется *обратный* порядок следования исходно заданных частных матриц. В свою очередь, при пассивном преобразовании координат элемента имеет место *прямой* порядок. Для его полярного представления имеем:

$$\mathbf{u}^{(3)} = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{roth}(-\Gamma_{13}) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \text{roth}(-\tilde{\Gamma}_{13}) \cdot \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}.$$

*Итоговая гиперболическая ротация* выполняется в двух указанных вариантах – либо из  $\tilde{E}_1$  как roth  $\Gamma_{13}$ , либо из сферически смешённого базиса  $\tilde{E}_{1u} = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{E}_1$  как

$$\text{roth } \tilde{\Gamma}_{13} = \text{rot}' \Theta_{13} \cdot \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13}. \quad (112A)$$

Вектор направляющих косинусов угла  $\tilde{\Gamma}_{13}$  смешён сферически в обратную сторону

$$\mathbf{e}_{\tilde{\sigma}} = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \mathbf{e}_{\sigma}. \quad (113A)$$

Согласно формулам полярного представления (474), (475) и с учётом (111A) имеем:

$$\text{roth } \Gamma_{13} = \sqrt{\mathbf{T}\mathbf{T}'} = \sqrt{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } 2 \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12}} = \sqrt{\text{roth } 2 \Gamma_{13}}, \quad (114A)$$

$$\text{rot } \Theta_{13} = \text{roth}(-\Gamma_{13}) \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{roth}(-\Gamma_{12}) \cdot \text{roth}(-\Gamma_{23}). \quad (115A)$$

В случае  $\tilde{E}_1 = \{\mathbf{I}\}$  при перемене порядка последовательности движений или скоростей на противоположный новый псевдодекартов базис задают вектор-строки той же матрицы  $\tilde{E}_3$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3' &= \{\text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12}\} = \{\mathbf{T}'\} = \{\text{roth } \tilde{\Gamma}_{13} \cdot \text{rot}(-\Theta_{13})\} = \\ &= \{\text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{roth } \Gamma_{13}\}. \end{aligned} \quad (116A)$$

Матрицы roth  $\Gamma_{23}$  и roth  $\tilde{\Gamma}_{13}$  выражены и действуют в  $\tilde{E}_1 = \{\mathbf{I}\}$ . Матрица roth  $\Gamma_{12}$  исходно выражена и действует в  $\tilde{E}_{2h} = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \tilde{E}_1$ . Итоговая гиперболическая ротация выполняется в двух вариантах – либо из  $\tilde{E}_1$  как roth  $\tilde{\Gamma}_{13}$ , либо из сферически смешённого базиса  $\tilde{E}_{1u'} = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \tilde{E}_1$  как roth  $\Gamma_{13}$ . В этом заключается двойственность во взгляде на матрицу roth  $\tilde{\Gamma}_{13}$ . Для обратного порядка имеем:

$$\text{roth } \tilde{\Gamma}_{13} = \sqrt{\mathbf{T}'\mathbf{T}} = \sqrt{\text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } 2 \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23}} = \sqrt{\text{roth } 2 \tilde{\Gamma}_{13}}, \quad (117A)$$

$$\text{rot}(-\Theta_{13}) = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth}(-\Gamma_{13}) = \text{roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \text{roth}(-\Gamma_{12}) \cdot \text{roth } \Gamma_{13}. \quad (118A)$$

В СТО угол ортосферического сдвига  $\Theta_{13}$  имеет чисто релятивистскую природу. Реально из исходного базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  этот релятивистский эффект воспринимается таким образом, что неточечный объект в результате суммирования двух поступательных, но неколлинеарных скоростей воспринимается наблюдателем  $N_1$  сферически повёрнутым в плоскости, задаваемой векторами  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$ . Этот геометрический эффект дополняет лоренцево сокращение того же объекта (в повёрнутом виде) в направлении вектора суммарной скорости  $\mathbf{v}_{13}$ . Аналогичный эффект ортосферического сдвига проявляется в гиперболической и в сферической геометриях для неколлинеарного суммарного поступательного движения неточечных объектов или координатного базиса.

Впервые угол ортосферического сдвига в *скалярной форме* был выявлен Зоммерфельдом (1931г.) для сложения двух ортогональных скоростей с трактовкой на сфере мнимого радиуса по формулам гиперболической геометрии. Это имело целью дать наглядную трактовку релятивистского коэффициента  $\langle 1/2 \rangle$  в прецессии Томаса [5, 63].

Тензорные углы  $\Gamma_{13}$  и  $\tilde{\Gamma}_{13}$  отличаются только векторами своих направляющих косинусов. Поэтому результат суммирования двух движений в векторной и в тензорной формах не зависит от порядка их последовательности тогда и только тогда, когда направляющие косинусы этих движений либо равны, либо аддитивно противоположны, то есть когда ротационные матрицы тригонометрически согласованы. Заметим, что итоговый результат в *скалярной форме* для двух движений от этого порядка не зависит.

Пусть  $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_{1,3}\}$  – вектор направляющих косинусов для  $\Gamma_{12}$ ,  $\mathbf{sh} \gamma_{12}$ ,  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  и  $\mathbf{v}_{12}$  в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$ ;  $\mathbf{e}_\beta = \{\cos \beta_{1,3}\}$  – вектор направляющих косинусов для  $\Gamma_{23}$ ,  $\mathbf{sh} \gamma_{23}$ ,  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_2^{(3)}$ . Определим *условную характеристику*  $\varepsilon$  – угол между  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ , как если бы они находились в одном и том же  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , через формальное значение его косинуса:

$$\cos \varepsilon = \begin{vmatrix} \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 \end{vmatrix}' \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\beta' \cdot \mathbf{e}_\alpha \quad (0 \leq \varepsilon \leq \pi, 0 \leq \sin \varepsilon \leq 1) \quad (119A)$$

$$(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 = \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3).$$

Если частные косинусы попарно равны, то  $\cos \varepsilon = +1$ . Если они попарно аддитивно противоположны, то  $\cos \varepsilon = -1$ . Соответственно

тогда  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  условно коллинеарны, но либо однородно направлены, либо разнородно направлены. Если же  $\cos \varepsilon = 0$ , то  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  условно сферически ортогональны. В общем случае эти векторы образуют условно угол  $\varepsilon$ .

Далее вычисляем элементы итоговой гиперболической матрицы roth  $\Gamma_{13}$ , согласно (114A). Из них найдем значения характеристик суммарного движения, в том числе его направляющие косинусы  $\cos \sigma_1$ ,  $\cos \sigma_2$ ,  $\cos \sigma_3$  в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$ . В свою очередь, для обратного порядка последовательности движений скалярный гиперболический угол итогового движения (в матрице roth  $\tilde{\Gamma}_{13}$ ) есть тот же  $\gamma_{13}$ . В тензорной форме он имеет направляющие косинусы  $\cos \tilde{\sigma}_1$ ,  $\cos \tilde{\sigma}_2$ ,  $\cos \tilde{\sigma}_3$ . Из (113A) вытекает, что

$$\cos \theta_{13} = \begin{vmatrix} \cos \tilde{\sigma}_1 \\ \cos \tilde{\sigma}_2 \\ \cos \tilde{\sigma}_3 \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 \\ \cos \sigma_2 \\ \cos \sigma_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\sigma' \cdot \mathbf{e}_\sigma. \quad (120A)$$

Связь между двумя вариантами двухступенчатого движения (прямым и обратным) сводится к замене частных углов по схеме:

$$\gamma_{12} \leftrightarrow \gamma_{23}, \quad \alpha_k \leftrightarrow \beta_k. \quad (121A)$$

Сначала найдём элементы матрицы-произведения в (114A):

$$\mathbf{B} = \{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } 2\Gamma_{23}\} = \{\mathbf{b}_{ij}\}.$$

При этом для дальнейших вычислений требуются только элементы её четвёртой строки. Гиперболические матрицы roth  $\Gamma$  здесь можно использовать в любой из канонических форм (363) или (364). Далее:

$$\begin{aligned} b_{41} &= (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_1 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_1), \\ b_{42} &= (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_2 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_2 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_2), \\ b_{43} &= (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_3 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_3 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_3), \\ b_{44} &= \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23}. \end{aligned}$$

Затем вычисляем нижний диагональный элемент (скаляр) матрицы  $\text{roth}^2 \Gamma_{13} = \text{roth } 2\Gamma_{13}$ , перемножая четвёртую строку  $\mathbf{B}$  на четвёртый столбец roth  $\Gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} s_{44} &= \text{ch } 2\gamma_{13} = 2\text{ch}^2 \gamma_{13} - 1 = \\ &= \text{ch } 2\gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } 2\gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23} - 2\sin^2 \varepsilon \cdot \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{sh}^2 \gamma_{23} = \\ &= 2 \cdot (\text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } \gamma_{23})^2 - 1. \end{aligned}$$

Отсюда сразу же следует известная скалярная косинусная формула гиперболической неевклидовой геометрии Лобачевского – Больяи:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma_{13} &= \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} = \\ &= \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} - \cos (\pi - \varepsilon) \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23}. \end{aligned} \quad (122A)$$

В неевклидовой геометрии  $(\pi - \varepsilon) = A_{123}$  – *внутренний* угол треугольника между сторонами «12» и «23»; в СТО  $\varepsilon$  – соответствующий *внешний* угол. При реальном физическом движении материи все  $\gamma > 0$  (на верхней и нижней частях гиперболоида Минковского), что в СТО соответствует  $\Delta ct > 0$  (движение в будущее). С учётом этого из (122A) для положительных углов движения (и расстояний по метрике Ламберта) следует правило “параллелограмма”, как в евклидовой геометрии:

$$|\gamma_{12} - \gamma_{23}| \leq \gamma_{13} \leq \gamma_{12} + \gamma_{23}. \quad (123A)$$

При этом направляющие косинусы углов движения или их тригонометрических проекций в евклидовых подпространствах изменяются в пределах от  $-1$  до  $+1$ . Неравенства (123A) и  $\gamma > 0$  относят расстояние в гиперболической геометрии в категорию норм.

Соответствующая формула для скалярного синуса получается из (122A) тригонометрическим способом в виде суммы двух квадратов:

$$\operatorname{sh}^2 \gamma_{13} = (\operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12})^2 + (\sin \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23})^2. \quad (124A)$$

Из (122A) и (124A) находим формулу для скалярного тангенса в том же виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}^2 \gamma_{13} &= [(\operatorname{th} \gamma_{12} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23}) / (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12})]^2 + \\ &+ [(\sin \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12}) / (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12})]^2. \end{aligned} \quad (125A)$$

Последняя приводится к классическому варианту (здесь также в тригонометрической форме):

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \gamma_{13} &= v_{13}/c = \sqrt{\operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12} - \sin^2 \varepsilon \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{12}} / \\ &/ (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{12} \cdot \operatorname{th} \gamma_{23}). \end{aligned} \quad (126A)$$

В (122A) и (126A) непосредственно видна независимость суммарной скалярной скорости и угла движения от порядка последовательности двух складываемых скоростей или движений. Это тригонометрическая формулировка в скалярной форме классического закона сложения двух координатных скоростей Пуанкаре – Эйнштейна [37, с. 34-35]. Но, как следует из ранее изложенного, закон сложения скоростей или движений

в *полном виде* должен содержать ещё информацию об ортосферическом сдвиге применительно к неточечным объектам. С другой стороны, из (124А) непосредственно следует родственный закон сложения двух *собственных* скоростей в скалярной синусной форме.

Ещё в одном варианте закон сложения двух скоростей выражается через *релятивистские факторы* (которым здесь отвечают секансы углов движения). Непосредственно из (122А) вытекает секансное соотношение [11, с. 222]:

$$\operatorname{sch} \gamma_{13} = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \gamma_{13}} = \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23} / (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12}). \quad (127\text{A})$$

Кроме того, формулы (122А), (124А), (126А), (127А) позволяют трактовать тригонометрическим образом правило сложения двух гиперболических отрезков или углов гиперболического движения в скалярной форме со стороны различных гиперболических функций. Если  $\cos \varepsilon = \pm 1$ , то из них следует простейшее аддитивное правило (69А). Если  $\cos \varepsilon = 0$ , то для суммы двух условно ортогональных друг другу гиперболических отрезков или движений следуют частные тригонометрические формулы:

$$\operatorname{th}^2 \gamma_{13} = \operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} - \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23}, \quad (128\text{A})$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{13} = \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \quad (\operatorname{sch} \gamma_{13} = \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23}), \quad (129\text{A})$$

$$\operatorname{sh}^2 \gamma_{13} = \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23}. \quad (130\text{A})$$

Но в трёхмерном евклидовом пространстве взаимно ортогональными могут быть максимально три вектора. Выполнив последовательно два акта суммирования трёх условно ортогональных отрезков или движений, выводим соответствующие трёхступенчатые скалярные тригонометрические формулы. (В данном частном случае суммарный скалярный угол также не зависит от порядка последовательности частных движений.) Для суммы трёх ортогональных отрезков имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}^2 \gamma_{14} = & \operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + \operatorname{th}^2 \gamma_{34} - (\operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34} + \\ & + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34}) + \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34}, \end{aligned} \quad (131\text{A})$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{14} = \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{34} \quad (\operatorname{sch} \gamma_{14} = \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{34}), \quad (132\text{A})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \gamma_{14} = & \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{34} + (\operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34} + \\ & + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34}) + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34}. \end{aligned} \quad (133\text{A})$$

Если здесь хотя бы один из частных углов бесконечен (то есть  $\gamma = \infty$ ,  $\operatorname{th} \gamma = 1$ ,  $v = \pm c$ ), то аналогичное имеет место и для общего

угла. Это соответствует скоростному постулату Эйнштейна (15 А). Условно ортогональное суммирование движений (например, в виде проекций в ортогональных криволинейных координатах Гаусса) естественным образом обобщается для n-мерной геометрии Лобачевского – Больяи, что весьма просто выражается в мультиплекативной комутативной косинусной интерпретации:

$$\operatorname{ch} \gamma_{1t} = \prod_{\substack{i=1, t-1 \\ j=2, t}} \operatorname{ch} \gamma_{ij} \quad (\varepsilon_{ij} = \pm \pi/2), \quad 3 \leq t \leq n.$$

Итоговый скалярный угол  $\gamma_{1t}$  (и соответственно расстояние  $a_{1t} = R \cdot \gamma_{1t}$ ) не зависит от порядка последовательности частных условно ортогональных движений. Например, протяжённость суммарного условно ортогонального движения по гиперболоиду в  $\langle P^{n+1} \rangle$ , или в пространстве Лобачевского – Больяи определяется в виде:

$$a_{1t} = R \cdot \operatorname{Arch} \prod_{\substack{i=1, t-1 \\ j=2, t}} \operatorname{ch} a_{ij} / R.$$

Далее с точки зрения тензорной тригонометрии вычисляем направляющие косинусы итоговой двухступенчатой ротации  $\Gamma_{13}$  и соответственно векторов  $\mathbf{th} \gamma_{13}$ ,  $\mathbf{sh} \gamma_{13}$  и  $\mathbf{v}_{13}$  в декартовом суббазисе  $E_1^{(3)}$ . Воспользуемся тем фактом, что они тождественны для матриц roth  $\Gamma$  и roth  $2\Gamma$ . Вслед за элементом  $s_{44}$  матрицы  $\operatorname{roth}^2 \Gamma_{13} = \operatorname{roth} 2\Gamma_{13}$  в (114А) вычисляем её остающиеся нижние элементы, перемножая четвёртую строку В на k-й столбец roth  $\Gamma_{12}$  ( $k = 1 \div 3$ ):

$$s_{4k} = s_{k4} = \operatorname{sh} 2\gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k = 2 \cdot \operatorname{ch} \gamma_{13} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k = 2 \cdot \operatorname{ch} \gamma_{13} \cdot [(\operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12}) \cdot \cos \alpha_k + \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot (\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k)]. \quad (134A)$$

Отсюда выводятся тригонометрические формулы двухступенчатого движения в векторной трактовке. Например, векторный синус в трёх тождественных вариантах записи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k &= (\operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12}) \cdot \cos \alpha_k + \\ &+ \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot (\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k), \\ \mathbf{sh} \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma &= (\operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12}) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\eta = \\ &= [\operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot (\operatorname{ch} \gamma_{12} - 1)] \cdot \mathbf{e}_\alpha + \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\beta, \end{aligned} \right\} (135A)$$

где  $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  – единичный вектор направляющих косинусов суммарного гиперболического движения;

$$\mathbf{e}_\eta = \{(\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k) / \sin \varepsilon\} = (\mathbf{e}_\beta - \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha) / \sin \varepsilon = \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta / \| \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha} \overrightarrow{\mathbf{e}_\alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta \| \quad (136A)$$

– единичный вектор направляющих косинусов условно ортогонального приращения общего движения по отношению к  $\mathbf{e}_\alpha$ , то есть к вектору первого движения. Имеем соотношение ортогональности:

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\alpha = 0 \quad (\mathbf{e}_\eta \perp \mathbf{e}_\alpha). \quad (137A)$$

Единичный вектор  $\mathbf{e}_\eta$  в дальнейшем широко используется при биортогональных разложениях приращений движения, в том числе дифференциальных или связанных с физическим ускорением (общим, тангенциальным и нормальным). Естественным образом он выводится из биортогонального представления второго вектора в сумме:

$$\mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta.$$

Соответственно вектор  $\mathbf{e}_\eta$  применяется для обратного порядка суммирования движений (см. далее). Из векторных формул (135A) и скалярной формулы (122A) получаем родственные векторные соотношения для тангенсов (координатных скоростей):

$$\begin{aligned} \mathbf{th} \gamma_{13} &= \mathbf{th} \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = \frac{\mathbf{th} \gamma_{12} + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\sin \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{sch} \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\eta = \\ &= \frac{\mathbf{sh} \gamma_{13}}{\mathbf{ch} \gamma_{13}} = \frac{\mathbf{th} \gamma_{12} + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot (1 - \mathbf{sch} \gamma_{12})}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{sch} \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\beta. \end{aligned} \quad (138A)$$

Геометрическая интерпретация синусных формул (135A), (124A) сводится к следующему. Второй гиперболический отрезок  $\gamma_{23}$  совместно с его синусной ортопроекцией на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$  разлагается на две проекции – параллельно и перпендикулярно  $\gamma_{12}(\mathbf{sh} \gamma_{12})$ . Эти проекции, в свою очередь, проецируются на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\overrightarrow{\text{ct}}$ , а именно:

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= \bar{\bar{\gamma}}_{23} + \frac{1}{\gamma_{23}} \rightarrow \gamma_{13} = (\gamma_{12} + \bar{\bar{\gamma}}_{23}) + \frac{1}{\gamma_{23}} \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{sh} \gamma_{13} = \mathbf{sh} (\gamma_{12} + \bar{\bar{\gamma}}_{23}) + \mathbf{sh} \frac{1}{\gamma_{23}} \rightarrow (135A) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{sh}^2 \gamma_{13} = \mathbf{sh}^2 (\gamma_{12} + \bar{\bar{\gamma}}_{23}) + \mathbf{sh}^2 \frac{1}{\gamma_{23}} \rightarrow (124A), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{sh} \bar{\bar{\gamma}}_{23} = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{sh} \gamma_{23}$ ,  $\mathbf{sh} \frac{1}{\gamma_{23}} = \sin \varepsilon \cdot \mathbf{sh} \gamma_{23}$ .

Тангенсные формулы (138A), (125A) получаются в результате того же разложения  $\gamma_{23}$  совместно с его тангенсной проекцией на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$  с последующим перекрёстным проецированием указанных проекций на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\overrightarrow{\text{ct}}^{(2)}$  с учётом поправки на изменение знаменателя – косинуса (или релятивистской поправки ко времени). В итоге исходные гиперболические отрезки  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{23}$  отображаются в однородных координатах  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$ . Это будет рассмотрено далее на модели Клейна.

Итак, векторы синуса и тангенса итогового двухступенчатого гиперболического движения в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  разлагаются биортогонально на проекции – параллельные и условно перпендикулярные  $e_\alpha$ . В связи с этим ортопроекции, согласно (124А) и (125А), подчиняются теореме Пифагора. Это важное свойство векторов общего движения  $sh \gamma_{13}$ ,  $th \gamma_{13}$  и  $v_{13}$  объединяет в определённой степени евклидову и неевклидовы гиперболическую и сферическую геометрии. Различие здесь состоит лишь в том, что в евклидовой геометрии (где частные векторы суммируются коммутативно) теореме Пифагора подчиняются ортопроекции векторов синуса и тангенса общего движения как на  $e_\alpha$  и  $e_\eta$ , так и на  $e_\beta$  и  $e_{\bar{\eta}}$ , а в неевклидовой геометрии – только на  $e_\alpha$  и  $e_\eta$  (при прямом порядке последовательности частных движений) и наоборот – на  $e_\beta$  и  $e_{\bar{\eta}}$  (при обратном их порядке). Таким образом, установлена теорема о приведении произвольной суммы двух движений к биортогональной (квадратичной) форме – коммутативной для евклидовой геометрии и некоммутативной для неевклидовой геометрии. Кроме того, в неевклидовой геометрии указанная специальная теорема (для ортопроекций и модулей векторов синуса и тангенса) действует именно в  $\langle E^3 \rangle^{(1)}$ , то есть в универсальном базисе.

Отмеченное геометрическое свойство формально позволило Пуанкаре и Эйнштейну вывести известным способом релятивистский закон суммирования двух неколлинеарных скоростей в векторной и скалярной формах, не нарушая общности выводов, при исходных  $\cos \alpha_1 = 1, \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0 \rightarrow \cos \varepsilon = \cos \beta_1$ . Ортогональные проекции векторов двух скоростей (по оси  $x_1$  и по осям  $x_2, x_3$ ) были приняты или независимыми и просуммированы (что позволяет вышеуказанный теоремы). Положим в векторной формуле (138А) значения параметров:

$$th \gamma_{12} = v/c \approx 10^{-4}, \quad \cos \alpha_1 = \pm 1 \rightarrow \cos \varepsilon = \pm \cos \beta_1;$$

$$th \gamma_{23} = c/c = 1 \rightarrow th \gamma_{13} = 1;$$

где  $v \approx 30$  км/сек – орбитальная скорость движения Земли. Имеем:

$$\begin{aligned} th \gamma_{13} = e_\sigma &= \frac{[th \gamma_{12} \pm \cos \beta_1 \cdot (1 - sh \gamma_{12})] \cdot e_\alpha + sh \gamma_{12} \cdot e_\beta}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot th \gamma_{12}} = \\ &= \frac{1}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot th \gamma_{12}} \cdot \begin{vmatrix} \pm th \gamma_{12} + \cos \beta_1 \\ sh \gamma_{12} \cdot \cos \beta_2 \\ sh \gamma_{12} \cdot \cos \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 \\ \cos \sigma_2 \\ \cos \sigma_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – истинные и кажущиеся углы наблюдения какого-либо светила на небесной сфере.

Отсюда следуют общие релятивистские формулы для аберрации:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A_{12} &= \frac{\cos \sigma_2}{\cos \sigma_1} = \frac{\operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \cos \beta_2}{\pm \operatorname{th} \gamma_{12} + \cos \beta_1}, & \left. \begin{aligned} \cos \alpha &= (\mathbf{e}_\sigma^+)' \cdot \mathbf{e}_\sigma^- = \\ &= \frac{\operatorname{sch}^2 \gamma_{12} - \sin^2 \beta_1 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{12}}{1 - \cos^2 \beta_1 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{12}} \end{aligned} \right\} \\ \operatorname{tg} A_{13} &= \frac{\cos \sigma_3}{\cos \sigma_1} = \frac{\operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \cos \beta_3}{\pm \operatorname{th} \gamma_{12} + \cos \beta_1} \end{aligned}$$

В частности, при  $\beta_3 = \pi/2 \rightarrow \cos \beta_2 = \sin \beta_1$  отсюда следует формула Эйнштейна для аберрации [37, с. 36]. Данное планетарное явление, согласно СТО, тождественно трактуется с точек зрения крайних мгновенных инерциальных систем, связанных либо с Землёй, либо со светилом, так как результат сложения двух скоростей в них одинаков. Классическая трактовка Эйнштейна сводит суть аберрации к изменению направления вектора суммарной скорости при движении Земли в противоположных направлениях в Солнечной системе. Это отвечает вышеуказанным общим формулам. Однако в ряде последующих работ (например [46, 43, 31]) аберрация стала трактоваться, на наш взгляд, неверно – исходя из сферического дефекта  $\theta$  в гиперболическом треугольнике скоростей, то есть аналогично прецессии Томаса. В данном случае ортосферический сдвиг  $\theta$  выражает соответствующую прецессию звёздного диска, которая может только иногда совпадать по величине с аберрацией (то есть имеет иной смысл).

Из формул (135А), (136А) следует, что  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$  – линейные комбинации  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ . Поэтому все 4 вектора условно лежат в одной и той же евклидовой плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$ . Повторяя эти рассуждения для обратного порядка последовательности движений, получаем аналогичные соотношения и выводы, но уже с первым исходным вектором  $\mathbf{e}_\beta$  и со вторым исходным вектором  $\mathbf{e}_\alpha$ . Вектор ортогонального приращения общего движения определяется в форме, аналогичной (136А):

$$\mathbf{e}_\eta = \{(\cos \alpha_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_k) / \sin \varepsilon\} = (\mathbf{e}_\alpha - \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\beta) / \sin \varepsilon, \quad (139\text{A})$$

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\beta = 0 \quad (\mathbf{e}_\eta \perp \mathbf{e}_\beta). \quad (140\text{A})$$

Новые векторы  $\operatorname{th} \tilde{\gamma}_{13}$ ,  $\operatorname{sh} \tilde{\gamma}_{13}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_{13}$  направлены в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  по  $\mathbf{e}_\sigma$ , но их модули остались прежними. Векторы  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$  – также линейные комбинации  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ , и лежат в той же  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ . С другой стороны, ротация (113А) осуществляется в тригонометрической плоскости матрицы  $\operatorname{rot} \Theta_{13}$ . Следовательно, последняя тождественна  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ .

Матрицу  $\operatorname{rot} \Theta_{13}$  можно вычислить сразу же в канонической форме (497). Нормальная ось сферической ротации  $\mathbf{r}_N$  находится через векторное (синусное) произведение (499) применительно к любой паре из набора характеристических единичных векторов; например,

для двухступенчатого движения – через  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ . При изменении порядка последовательности движений на обратный каждый характеристический единичный вектор заменяется на свой спарринг-вектор. Все шесть характеристических векторов  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_\beta$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{e}_\bar{\sigma}$ ,  $\mathbf{e}_\eta$  и  $\mathbf{e}_\bar{\eta}$  расположены в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$  в пределах угла  $\pi$ .

Из (136А) и (139А) следует, что

$$\mathbf{e}_\bar{\eta}' \cdot \mathbf{e}_\eta = -\cos \varepsilon = \cos(\pi - \varepsilon), \quad (141\text{A})$$

$$\mathbf{e}_\bar{\eta}' \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\beta = \sin \varepsilon = \cos(\pi/2 - \varepsilon). \quad (142\text{A})$$

Кроме того, векторы  $\mathbf{e}_\bar{\sigma}$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{r}_N$  должны образовывать правую тройку в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , чтобы соответствовать принятому направлению отсчёта угла  $\theta$  против часовой стрелки. В свою очередь, значение  $\cos \theta_{13}$  в структуре (497) вычисляется через соотношения (113А), (135А) и реверсивный аналог последнего. В итоге (релятивистский) сферический сдвиг относительно исходного  $\tilde{E}_1$  в косинусном варианте составляет:

$$\cos \theta_{13} = \mathbf{e}_\bar{\sigma}' \cdot \mathbf{e}_\sigma = (A + \cos \varepsilon \cdot B + \cos^2 \varepsilon \cdot C + \cos^3 \varepsilon \cdot D) / \operatorname{sh}^2 \gamma_{13} > 0, \quad (143\text{A})$$

$$A = \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12} > 0,$$

$$B = \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot (\operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \operatorname{ch} \gamma_{12} + \operatorname{ch} \gamma_{23} - 1) > 0,$$

$$C = \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \cdot (\operatorname{ch} \gamma_{23} - 1) + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot (\operatorname{ch} \gamma_{12} - 1) > 0,$$

$$D = \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot (\operatorname{ch} \gamma_{12} - 1) \cdot (\operatorname{ch} \gamma_{23} - 1) > 0,$$

$$\operatorname{sh}^2 \gamma_{13} = \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot (1 + \cos^2 \varepsilon) +$$

$$+ 2 \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon > 0.$$

Для (143А) как функции от  $\cos \varepsilon$  имеют место три экстремума:  $\cos \theta_{13} = +1$  при  $\cos \varepsilon = \pm 1$  (максимумы) и  $\cos \theta_{13} = A / \operatorname{sh}^2 \gamma_{13}$  при  $\cos \varepsilon = 0$  (минимум).

При  $\cos \varepsilon = +1$  имеем:  $A + B + C + D = \operatorname{sh}^2 \gamma_{13} = \operatorname{sh}^2(\gamma_{12} + \gamma_{23})$ .

При  $\cos \varepsilon = -1$  имеем:  $A - B + C - D = \operatorname{sh}^2 \gamma_{13} = \operatorname{sh}^2(\gamma_{12} - \gamma_{23})$ .

Эти два случая тривиальны и отображают условно коллинеарные движения – однонаправленные и разнонаправленные. Минимум  $\cos \theta_{13}$  и соответственно максимум по абсолютной величине угла сферического сдвига  $\theta_{13}$  достигается при условной ортогональности  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ . Тогда для суммы ортогональных движений (скоростей) имеем:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{13} = A / \operatorname{sh}^2 \gamma_{13} &= (\operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12}) / (\operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} - \\ &- \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23}) > 0, \end{aligned}$$

$$\sin \theta_{13} = \mp \operatorname{th} \gamma_{12} \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} / (1 + \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23}) = \mp \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} / (1 + \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23}).$$

Эта частная синусная скалярная формула, установленная впервые Зоммерфельдом, как видно даёт релятивистский коэффициент « $1/2$ » для прецессии Томаса [5, 63]. В свою очередь, в векторной форме имеем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{th} \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma &= \operatorname{th} \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\beta, \\ \operatorname{th} \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_{\bar{\sigma}} &= \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\beta + \operatorname{th} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \right\}$$

Если одна из скоростей равна скорости света, например  $\operatorname{th} \gamma_{23} = \pm 1$ , то  $\cos \theta_{13} = \operatorname{sch} \gamma_{12}$ ,  $\sin \theta_{13} = \mp \operatorname{th} \gamma_{12}$  и  $\operatorname{th} \gamma_{13} = 1$ . Теоретически максимальный релятивистский сферический сдвиг ( $\theta_{13} = \mp \pi/2$ ) имеет место при суммировании условно ортогональных световых скоростей. В гиперболической геометрии вращение  $\theta$  в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$  осуществляется против направления суммирования отрезков.

Применив для альтернативного вывода сферического сдвига *специальную теорему о приведении суммы двух движений к биортогональной форме*, получаем также общие формулы для  $\cos \theta_{13}$  и  $\sin \theta_{13}$ , подставив значения:  $\cos \varepsilon = \pm 1$ ,  $\gamma_{12} \rightarrow (\gamma_{12} + \bar{\gamma}_{23})$ ,  $\gamma_{23} \rightarrow \frac{1}{\gamma_{23}}$ .

Согласно ротационной формуле (113А), положительные значения угла  $\theta_{13}$  отсчитываются в тригонометрической плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  в направлении от  $\mathbf{e}_\sigma$  к  $\mathbf{e}_\sigma$ . При этом, как указывалось ранее,  $\mathbf{e}_{\bar{\sigma}}$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{r}_N$  составляют правую тройку, что однозначно определяет направление ортосферической ротации  $\operatorname{rot} \Theta$  в структуре (497).

Особый случай отвечает ортогональной (*и теперь не условно!*) сумме бесконечно малых частных углов движения или их первых дифференциалов. Например, из синусных формул имеем:

$$\lim \gamma_{13} = \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2}; \quad \theta_{13} = -(\gamma_{12} \cdot \gamma_{23}/2) \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &\rightarrow 0 \\ \gamma_{23} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Это, во-первых, выражает инфинитиземальную теорему Пифагора для прямоугольного треугольника на единичном гиперболоиде Минковского (двумерный вариант) и его площадь с точностью до знака. Во-вторых, отсюда же следует инфинитиземальная тождественность угла ортосферической ротации  $\theta_{13}$  и сферической угловой девиации Ламберта – Гаусса – Бонне для данного гиперболического треугольника. Это по сути есть *дефект*, или девиация со знаком «–». (Для сферического треугольника на единичном гиперсфериоде в аналогичной формуле для углового *экцесса* применялся бы знак «+».) *Интегральный угол ортосферической ротации также тождествен дефекту гиперболического (геодезического) треугольника на гиперболоидах I и II.* (Утверждение устанавливается через интеграл по поверхности.) Это иллюстрирует хорошо известный факт неевклидовой геометрии,

что угловая сферическая девиация любой геометрической фигуры, образуемой геодезическими отрезками на двумерной поверхности постоянной (в данном случае единичной) гауссовой кривизны с точностью до знака равна произведению площади на кривизну.

Инфинитиземальная теорема Пифагора может применяться для бесконечно малых гиперболических отрезков (углов) с их количеством  $k \leq n$ . Повторив, согласно (128А)–(130А), ортогональное суммирование для  $k$  бесконечно малых независимых частных углов, получаем:

$$\lim_{\gamma_{(j)} \rightarrow 0} \gamma = \sqrt{\sum_{j=1}^k \gamma_{(j)}^2}.$$

Как и при  $k = 2$ , имеет место коммутативность частных углов движения в векторной и скалярной формах суммирования. Это иллюстрирует хорошо известный факт, что неевклидова геометрия инфинитиземально евклидова. В частности, элемент площади  $ds = d\gamma_{(1)} d\gamma_{(2)} R^2$ ; элемент  $k$ -мерного объёма  $dV = d\gamma_{(1)} \dots d\gamma_{(k)} R^k$ . В свою очередь, первый дифференциал общего угла движения, согласно инфинитиземальной теореме Пифагора на гиперболоидах, выражается в двух вариантах:

$$(d\gamma)^2 = \sum_{j=1}^n [d\gamma_{(j)}]^2, \quad (144A)$$

где  $d\gamma_{(j)}$  – ортопроекция  $d\gamma$  на  $j$ -ю ось ортогональных криволинейных координат Гаусса;

$$\left. \begin{aligned} d\gamma &= \overline{\overline{d\gamma}} \cdot e_\alpha + \overline{d\gamma} \cdot e_\eta = d\gamma \cdot e_\beta, \\ (d\gamma)^2 &= (\overline{\overline{d\gamma}})^2 + (\overline{d\gamma})^2, \end{aligned} \right\} \quad (145A)$$

где  $\overline{\overline{d\gamma}}$  и  $\overline{d\gamma}$  – ортопроекции  $d\gamma$  в характеристическом мгновенном декартовом суббазисе  $\tilde{E}_m^{(2)} \equiv \{e_\alpha, e_\eta\}$ , задаваемом в точке  $M$  гиперболоида на касательной  $\langle E^2 \rangle$ . С другой стороны, соотношения типа (129А), (132А) выражают неевклидов аналог теоремы Пифагора в интегральной форме. Имеется изоморфизм (см. например [43]) между любыми родственными геометрическими объектами, в том числе особыми (прямые, окружности, предельные окружности и т. д.), в пространстве Лобачевского – Больяи и на псевдосфере Бельтрами, с одной стороны, и на гиперболоидах II и I Минковского, с другой стороны (как и на их моделях Клейна и Пуанкаре). Как показано выше, в неевклидовой гиперболической геометрии угол  $\theta$  есть также дефект геодезического треугольника или более сложной – составной двумерной геометрической фигуры. Он связан с тем, что на искривлённой поверхности параллельный перенос вектора зависит от пути.

В частности, для случая уже рассмотренной выше *абберрации*, для которой  $\mathbf{th} \gamma_{13} = \mathbf{e}_\sigma$ , вычислим дополнительно косинус угла ортосферического сдвига по формуле (143А):

$$\cos \theta_{13} = \mathbf{e}_\sigma' \cdot \mathbf{e}_\sigma = 1 - \frac{(1 - \operatorname{sch} \gamma_{12}) \cdot \sin^2 \beta_1}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \operatorname{th} \gamma_{12}}.$$

Здесь  $\theta_{13}$  – угол ортосферической ротации и он же есть дефект гиперболического треугольника, образуемого на гиперболоиде I Минковского (радиуса  $R = c$ ) геодезическими отрезками, отвечающими их проекциям-скоростям  $v, c$  и релятивистской сумме последних. (Этот угол, как отмечалось выше, относится исключительно к прецессии звёздного диска.) В самом же треугольнике скоростей на проективной евклидовой гиперплоскости угловой дефект искажается, как и углы между скоростями, кроме централизованных. (Такого рода искажения рассмотрены далее на тангенсной проективной модели Клейна.)

Релятивистские формулы эффекта Допплера для частоты света [37, с. 39] имеют простые гиперболические аналоги. Их можно получить геометрически, используя тангенс-тангенсную аналогию (§ 6.4):

$$v \cdot ct = v^{(1)} \cdot \Delta ct^{(1)} = v^{(1)} \cdot \{ct^{(1)} \cdot [1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi_R(\gamma)]\} \equiv v^{(1)} \cdot ct \cdot \operatorname{ch} \gamma (1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{th} \gamma),$$

$$v^{(1)}/v = \operatorname{sch} \gamma / (1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{th} \gamma) = 1 / (\operatorname{ch} \gamma - \cos \alpha \cdot \operatorname{sh} \gamma),$$

где  $v$  и  $v^{(1)}$  – частота света движущегося источника и его же частота, воспринимаемая наблюдателем  $N_1$  в исходном универсальном базисе;  $ct$  и  $ct^{(1)}$  – одновременные интервалы времени с точки зрения  $N_1$ ;  $\Delta ct^{(1)}$  – продолжительность в  $\tilde{E}_1$  заданного интервала излучения  $ct$ ;  $\alpha$  – угол между направлением движения источника и лучом света.

Отметим частные случаи.

*A) Продольный встречный эффект*,  $\alpha = 0, \cos \alpha = +1$  (источник приближается):  $v^{(1)}/v = 1 / (\operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \gamma) = \exp \gamma > 1$ . То есть здесь наблюдается “синее смещение” частоты света.

*B) Продольный обратный эффект*,  $\alpha = \pi, \cos \alpha = -1$  (источник удаляется):  $v^{(1)}/v = 1 / (\operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma) = \exp (-\gamma) < 1$ . То есть здесь наблюдается “красное смещение” частоты света.

*C) Поперечный эффект*,  $\alpha = \pm \pi/2, \cos \alpha = 0$ :  $v^{(1)}/v = \operatorname{sch} \gamma$ . То есть здесь наблюдается меньшее “красное смещение” частоты света, вследствие обычного эйнштейнова замедления времени в относительно движущемся источнике света.

Далее рассмотрим *внешнюю* векторную тригонометрию единичных гиперболоидов Минковского ( $R = 1$ ).

\* \* \*

Гиперболоид II

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{sh} \gamma \\ \mathbf{ch} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_a \\ \mathbf{ch} \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{при } \Delta ct > 0: \gamma > 0) \quad (146\text{A})$$

–  $4 \times 1$  псевдоединичный радиус-вектор точки гиперболоида II. Метрический инвариант выражается в виде:

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}^\oplus \cdot \mathbf{i} = \mathbf{sh}' \gamma \cdot \mathbf{sh} \gamma - \mathbf{ch}^2 \gamma = \mathbf{sh}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_a' \mathbf{e}_a - \mathbf{ch}^2 \gamma = -1 = i^2. \quad (147\text{A})$$

Остальные тригонометрические функции получаются делением базового элемента  $\mathbf{i}$  либо на  $\mathbf{ch} \gamma$ , либо на  $\mathbf{sh} \gamma$ . Далее,

$$\mathbf{sch} \gamma = \mathbf{sch} \gamma \cdot \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{th} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_a \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \times 1 \text{ радиус-вектор секанса, конец которого лежит на тангенсно-котангенсной евклидовой гиперплоскости}$$

(нулевому значению секанса соответствует принадлежность вектора изотропному конусу),

$$\mathbf{sch}' \gamma \cdot \mathbf{i}^\oplus \cdot \mathbf{sch} \gamma = \mathbf{th}' \gamma \cdot \mathbf{th} \gamma - 1 = \mathbf{th}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_a' \mathbf{e}_a - 1 = (i \cdot \mathbf{sch} \gamma)^2;$$

$$\mathbf{cosh} \gamma = \mathbf{cosh} \gamma \cdot \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \mathbf{cth} \gamma \end{bmatrix} - 4 \times 1 \text{ радиус-вектор косеканса, конец которого лежит на тангенсно-котангенсной цилиндрической евклидовой гиперповерхности}$$

(нулевому значению косеканса отвечает принадлежность вектора изотропному конусу),

$$\mathbf{cosh}' \gamma \cdot \mathbf{i}^\oplus \cdot \mathbf{cosh} \gamma = \mathbf{e}_a' \mathbf{e}_a - \mathbf{cth}^2 \gamma = (i \cdot \mathbf{cosh} \gamma)^2.$$

(Все эти векторы времениподобны.)

Гиперболическое преобразование (движение) какого-либо точечного элемента  $\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3$  единичного гиперболоида II в активной форме в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  представляется в виде:

$$\frac{\mathbf{i}_3}{\mathbf{sh} \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_a} = \text{roth} \Gamma_{13} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \text{roth} \Gamma_{23} \cdot \text{rot} (-\Theta_{13}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \quad (148\text{A})$$

$$= \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \text{roth} \Gamma_{23} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \text{roth} \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \cdot \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \{\text{roth} \Gamma_{12} \cdot (\text{roth} \Gamma_{23})_{\tilde{\mathbf{E}}_2} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12}\}_{\tilde{\mathbf{E}}_1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{sh} \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_a \\ \mathbf{ch} \gamma_{12} \end{bmatrix}.$$

Траектория гиперболического (геодезического) движения  $\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3$  принадлежит сечению гиперболоида II псевдоплоскостью ротации матрицы  $\{\text{roth } \Gamma_{12}, \text{roth } \Gamma_{23}, \text{roth}^{-1} \Gamma_{12}\}$ . Аналитически она производится при непрерывном преобразовании  $\mathbf{i} \rightarrow (\mathbf{i} + d\mathbf{i})$  путём изменения в матрице  $\text{roth } \Gamma_{23}$  значения скалярного угла от 0 до  $\gamma_{23}$  при  $\mathbf{e}_\beta = \text{const}$ . В модели Клейна внутри абсолюта, или тангенсной модели (рис. 4) эта траектория отображается прямолинейным отрезком  $\text{th } \gamma_{23}$ . На гиперболоиде II нетрудно реализовать гиперболический треугольник (и далее другие многоугольники) через полярное представление:

$$\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \mathbf{u}_1 = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3,$$

$$\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12}\} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3.$$

Централизованный треугольник  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$  трансформируется в произвольный треугольник путём активного преобразования координат в том же  $\tilde{E}_1$ .

### Гиперболоид I

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{ch} \gamma \\ \mathbf{sh} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_a \\ \mathbf{sh} \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{при } \Delta \alpha > 0: \gamma > 0) \quad (149A)$$

–  $4 \times 1$  единичный радиус-вектор точки гиперболоида I. Метрический инвариант выражается виде:

$$\mathbf{e}' \cdot \mathbf{I}^\oplus \cdot \mathbf{e} = \mathbf{ch}' \gamma \cdot \mathbf{ch} \gamma - \mathbf{sh}^2 \gamma = \mathbf{ch}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_a' \mathbf{e}_a - \mathbf{sh}^2 \gamma = +1 = 1^2. \quad (150A)$$

Остальные тригонометрические функции получаются делением базового элемента  $\mathbf{e}$  либо на  $\mathbf{ch} \gamma$ , либо на  $\mathbf{sh} \gamma$ . Далее,

$$\mathbf{sch} \gamma = \mathbf{sch} \gamma \cdot \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \mathbf{th} \gamma \end{bmatrix} - 4 \times 1 \text{ радиус-вектор секанса, конец которого лежит на тангенсно-котангенсной цилиндрической евклидовой гиперповерхности (нулевому значению секанса соответствует принадлежность вектора изотропному конусу),}$$

$\mathbf{sch}' \gamma \cdot \mathbf{I}^\oplus \cdot \mathbf{sch} \gamma = \mathbf{e}_a' \mathbf{e}_a - \mathbf{th}^2 \gamma = (\mathbf{sch} \gamma)^2$ ;

$$\mathbf{cosh} \gamma = \mathbf{cosh} \gamma \cdot \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{cth} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{cth} \gamma \cdot \mathbf{e}_a \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \times 1 \text{ радиус-вектор косеканса, конец которого лежит на тангенсно-котангенсной евклидовой гиперплоскости (нулевому значению косеканса соответствует принадлежность вектора изотропному конусу),}$$

$\mathbf{cosh}' \gamma \cdot \mathbf{I}^\oplus \cdot \mathbf{cosh} \gamma = \mathbf{cth}' \gamma \cdot \mathbf{cth} \gamma - 1 = \mathbf{cth}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_a' \mathbf{e}_a - 1 = (\mathbf{cosh} \gamma)^2$ .

(Все эти векторы пространствуподобны.)

Допустимое гиперболическое преобразование (движение) какого-либо точечного элемента  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  единичного гиперболоида I в активной форме в  $\tilde{E}_1$  представляется в виде:

$$\begin{array}{c} \mathbf{e}_3 \\ \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{ch} \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \\ \operatorname{sh} \gamma_{13} \end{array}} \end{array} = \left\{ \operatorname{roth} \Gamma_{12} \cdot (\operatorname{roth} \Gamma_{2 \rightarrow 3})_{\tilde{E}_2} \cdot \operatorname{roth}^{-1} \Gamma_{12} \right\}_{\tilde{E}_1} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{e}_2 \\ \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} \\ \operatorname{sh} \gamma_{12} \end{array}} \end{array}. \quad (151A)$$

В силу топологии модели Клейна вне абсолюта, гомеоморфной гиперболоиду I и псевдосфере Бельтрами (рис. 4), понятно, что между произвольными элементами  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  не всегда может быть реализовано чисто гиперболическое движение. (В этом же особенность геометрии в большом для гиперболоида I.) Движение  $\operatorname{roth} \Gamma_{2 \rightarrow 3}$  реализуется тогда и только тогда, когда котангенсные проекции элементов  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  в модели Клейна вне абсолюта можно соединить прямолинейным отрезком  $\operatorname{cth} \gamma_{23}$ , не пересекая и не касаясь овального абсолюта *внутри отрезка*, и при этом наоборот, пересекая овальный абсолют *вне отрезка*, то есть его прямолинейным продолжением.

В простейшем случае  $\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{e}_{\bar{\sigma}} \rightarrow \gamma_{12} = \gamma_{13}$ , согласно реверсивному аналогу (135A); при этом имеем:

$$\cos \varepsilon = -\operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12} / (\operatorname{ch} \gamma_{23} - 1) \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12}.$$

Исходя из преобразования  $\mathbf{e}_3 = T \cdot \mathbf{e}_2$  в общей комбинированной форме с учётом промежуточного приведения элементов к виду (149A), то есть к  $\mathbf{e}_{2(1)}$  и  $\mathbf{e}_{3(1)}$ , в базисе  $\tilde{E}_2$  имеем:

$$T_{2 \rightarrow 3} = \operatorname{roth} \Gamma_{23} \cdot \operatorname{rot} (-\Phi_{13}) \cdot \operatorname{rot} \Phi_{\alpha \rightarrow \bar{\sigma}} = \operatorname{roth} \Gamma_{23} \cdot \operatorname{rot} \Phi_{\alpha \rightarrow \bar{\sigma}}. \quad (152A)$$

В частности, в указанном выше случае  $T = T' = \operatorname{roth} \Gamma_{2 \rightarrow 3} = \operatorname{roth} \Gamma_{23}$ . Тогда заключаем, что матрица гиперболического движения  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  по гиперболоиду I та же, что и для гиперболоида II при движении  $\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3$ .

\* \* \*

Используя аналогичным образом матричный подход ротационной тензорной тригонометрии, но уже в самом общем случае, определим далее основные итоговые характеристики (скалярные, векторные, тензорные) для многоступенчатого (суммарного) гиперболического движения. При этом установим также в самой общей форме закон суммирования частных движений в гиперболической геометрии и, что тождественно, – общий закон сложения скоростей в СТО. В этом случае матрица движения  $T$ , или она же – матрица непрерывного однородного преобразования Лоренца имеет общую тригонометрическую каноническую форму, выражаемую в  $\tilde{E}_1$  в виде:

$$T = \text{roth } \Gamma \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{roth } \bar{\Gamma} = \quad (153A), (154A)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}_\sigma}' + \overline{\mathbf{e}_\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}_\sigma}' & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma' & \text{ch } \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}_\sigma}' + \overline{\mathbf{e}_\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}_\sigma}' & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma' & \text{ch } \gamma \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\sigma' + \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ (\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}_\sigma' = \cos \varepsilon \cdot \overline{\mathbf{e}_\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}_\sigma}') & \\ \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma' & \text{ch } \gamma \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Матрица  $\text{roth } \Gamma$  вычисляется по формуле (114А). Матрица  $\text{rot } \Theta$  в целом выражается канонической формой (497). Здесь она вычисляется либо по формуле (115А), либо через представление (497) с использованием при этом значений  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma}$  и формул (120А), (499). Далее имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{ch } 2\gamma &= s_{44}; \quad \text{ch } \gamma = +\sqrt{(s_{44} + 1)/2}, \quad \text{sh } \gamma = +\sqrt{(s_{44} - 1)/2}, \\
 \text{th } \gamma &= v/c = +\sqrt{(s_{44} - 1)/(s_{44} + 1)} = \text{sh } \gamma / \text{ch } \gamma; \\
 \cos \sigma_k &= s_{4k} / \sqrt{s_{44}^2 - 1}, \quad \text{th } \gamma_k = v_k/c = \cos \sigma_k \cdot \text{th } \gamma = s_{4k} / (s_{44} + 1); \\
 \cos \theta &= 0,5 \text{ tr rot } \Theta - 1 = (\text{tr rot } \Theta_{3 \times 3} - 1)/2 = \overline{\mathbf{e}_\sigma} \cdot \mathbf{e}_\sigma.
 \end{aligned} \right\} \quad (155A)$$

Вместе с полярным представлением (153А) формулы (154А), (155А) дают в генеральной форме закон суммирования многоступенчатых движений в геометрии Лобачевского – Больяни и соответственно физических скоростей в СТО. Скалярные параметры движения не изменяются при зеркальной перестановке частных движений. Но зеркальная перестановка вызывает транспонирование общей матрицы тензора движения  $T$  при исходном базисе  $\tilde{E}_1 = \{\mathbf{I}\}$ .

Тензорная тригонометрия в рассматриваемом здесь варианте применима к решению разнообразных задач гиперболической геометрии и кинематики СТО. Она представляет особый интерес для геометрических объектов, задаваемых внешним образом в псевдоевклидовом пространстве Минковского. Например, длины и расстояния вычисляются через  $\gamma$  и  $d\gamma$ ; площади фигур – через  $\theta$  и  $d\theta$ ; объемы тел – через площади и ортогональные им высоты.

\* \* \*

Вернёмся к закону суммирования движений в скалярной и векторной тангенсных формах (125А) и (138А). С точки зрения модели Клейна внутри абсолюта (§12.1, рис. 4) в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  суммирование тангенсных проекций начинается из центра проектирования  $O$  – общего центра всех псевдодекартовых базисов  $\tilde{E}$ . Первая тангенсная проекция угла  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  евклидово не искажается. Как вектор она исходит из точки  $O$  (рис. 4А). Последующие тангенсные проекции  $\mathbf{th} \gamma_{23}, \mathbf{th} \gamma_{34}$  и т. д. прилагаются в конце предыдущего вектора и в общем случае евклидово искажаются по длине. Далее суббазис  $\tilde{E}_1^{(3)}$  играет роль однородных координат. Согласно ортогональному тангенсному представлению (125А) и (138А), перпендикулярная проекция искажённого вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  вычисляется в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  следующим образом:

$$\mathbf{th} \frac{1}{\gamma_{23}} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{sch} \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}}. \quad (156\text{A})$$

Соответствующая ей параллельная проекция искажённого вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  вычисляется как разность искажённой параллельной проекции в (138А) и её неискажённой части  $\mathbf{th} \gamma_{12}$ :

$$\mathbf{th} \bar{\gamma}_{23} = \frac{\cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{sch}^2 \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}}. \quad (157\text{A})$$

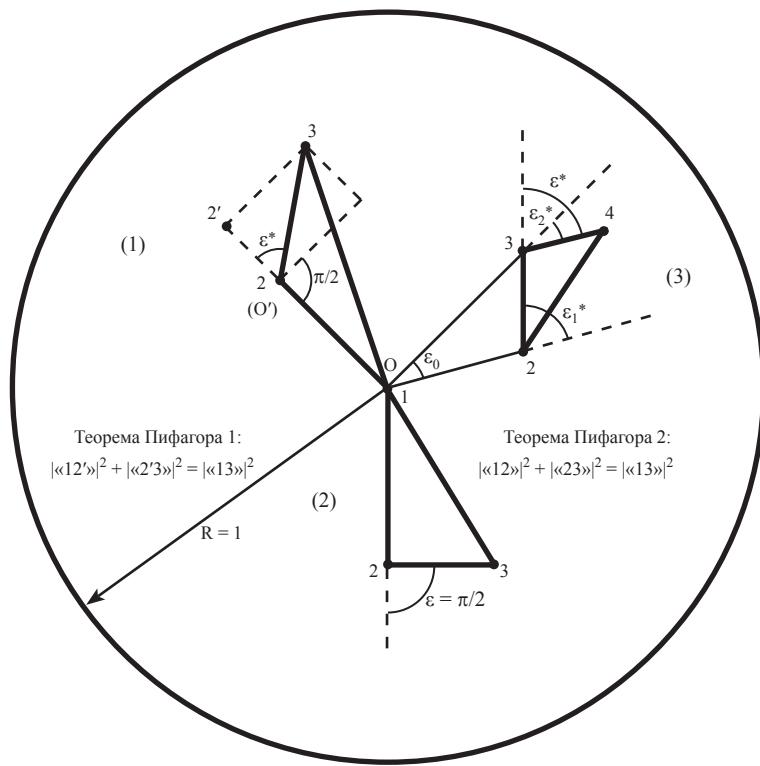
В векторной сумме, составляющей  $\mathbf{th} \gamma_{13}$  [рис. 4А (2)], искажается только второй вектор  $\mathbf{th} \gamma_{23}$ . Заметим, что для катетов (156А), (157А) и гипотенузы  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  в прямоугольном треугольнике «22'3» теорема Пифагора не выполняется, так как ни один из катетов не исходит из начала универсального базиса  $\tilde{E}_1$ , а формально – в силу их искажения. В (156А), (157А) фигурируют три коэффициента искажения:

$k_1 = (1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12})$  – коэффициент, вызванный гиперболическим суммированием отрезков  $\gamma_{12}$  и  $\bar{\gamma}_{23}$ ;

$k_2 = \mathbf{sch} \gamma_{12}$  – коэффициент, вызванный поправкой на изменение знаменателя-косинуса в (138А), или релятивистской поправкой на изменение координатного времени в точке  $O'$ , где осуществляется суммирование, при его преобразовании  $t^{(2)} \rightarrow t^{(1)}$ ;

$k_3 = \mathbf{sch} \gamma_{12}$  – коэффициент, вызванный перекрёстным характером проецирования в модели Клейна вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23} \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\mathbf{ct}^{(2)}$ , или тождественным ему лоренцевым сокращением.

В отличие от предыдущих последний коэффициент  $k_3$  действует только на параллельную проекцию вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23}$ . Заметим, что  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$  есть собственное евклидово подпространство в базисе  $\tilde{E}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1$ , где матрица  $\text{roth } \Gamma_{12}$  полностью определяется значениями  $\gamma_{12}$  и его  $\mathbf{e}_a$ .



**Рис. 4А.** Суммирование двух тангенсных проекций гиперболических отрезков – движений в плоской модели Клейна по теореме о приведении их суммы к биортогональной форме:

Вариант 1. Централизованный в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  треугольник.

$$\langle\!\langle 12 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{12}, \quad \langle\!\langle 22' \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \bar{\gamma}_{23},$$

$$\langle\!\langle 23 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{23},$$

$$\langle\!\langle 13 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{13}, \quad \langle\!\langle 2'3 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{23}^\perp, \quad \varepsilon^* = \pi - A_{123}^*.$$

Вариант 2. Централизованный в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  прямоугольный треугольник.

$$\langle\!\langle 12 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{12}, \quad \langle\!\langle 23 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{23}, \quad \langle\!\langle 13 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{13}; \quad \varepsilon = \pi/2 = A_{123}.$$

Вариант 3. Децентрализованный в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  треугольник, компланарный с центром О.

$$\langle\!\langle 23 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{23}, \quad \varepsilon_1^* = \pi - A_{123}^*,$$

$$\langle\!\langle 34 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{34}, \quad \varepsilon_2^* = \pi - A_{132}^*,$$

$$\langle\!\langle 24 \rangle\!\rangle - \operatorname{th} \gamma_{24}, \quad \varepsilon_0 = A_{213}, \quad \varepsilon^* = \pi - A_{234}^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* - \varepsilon_0.$$

В процессе перекрёстного проецирования начало искажаемого вектора в однородных координатах переносится в точку  $O'$  – конец вектора  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  (рис. 4А). Искажённый угол  $\varepsilon^*$  между векторами  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  в модели Клейна вычисляется через искажённые проекции  $\mathbf{th} \gamma_{23}$ , согласно формуле евклидовой скалярной тригонометрии:

$$\cos \varepsilon^* = \operatorname{th} \bar{\bar{\gamma}}_{23} / \sqrt{\operatorname{th}^2 \bar{\bar{\gamma}}_{23} + \operatorname{th}^2 \frac{1}{\bar{\bar{\gamma}}_{23}}} = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon} < \cos \varepsilon \quad (158\text{A})$$

(если  $\varepsilon = \pi/2$ , то он не искажается:  $\cos \varepsilon^* = \cos \varepsilon = 0$ ).

В формуле фигурируют коэффициент искажения  $k_2$  и коэффициент лоренцева сокращения (54А), то есть  $k_3$ , но для модуля вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  в целом. Заметим, что в СТО  $\varepsilon^*$  есть реально искажаемый в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  сферический угол между векторами скоростей  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  (гл. 4А).

В более общем случае (рис. 4А) искажённый угол  $\varepsilon^*$  между векторами  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{34}$  в плоской модели Клейна вычисляется через искажённые частные углы  $\varepsilon_1^*$  и  $\varepsilon_2^*$ , а также неискажённый центральный угол  $\varepsilon_0$  (между  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{13}$ ) с использованием соотношений:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* - \varepsilon_0, \quad (159\text{A})$$

$$\cos \varepsilon_1^* = \cos \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1},$$

$$\sin \varepsilon_1^* = \sin \varepsilon_1 / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1},$$

$$\cos \varepsilon_2^* = \cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{13} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2},$$

$$\sin \varepsilon_2^* = \sin \varepsilon_2 / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2},$$

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon^* = & [\cos \varepsilon_0 \cdot (\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{13} - \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2) + \\ & + \sin \varepsilon_0 \cdot (\sin \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{13} + \sin \varepsilon_2 \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12})] / \\ & / (\sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1} \cdot \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2}) \end{aligned} \quad (160\text{A})$$

(если  $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 = 0$ , то  $\cos \varepsilon = \pm \cos \varepsilon_0$  в зависимости от знаков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ).

В самом же общем случае для пары векторов  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{34}$  в пространственной модели Клейна искажение угла между векторами тангенсов можно вычислить исходя из биортогонального разложения второго вектора  $\mathbf{th} \gamma_{34}$  в собственном  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(3)}$  на проекции – параллельно и перпендикулярно характеристической плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{th} \gamma_{12}, \mathbf{th} \gamma_{23} \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_{\alpha(12)}, \mathbf{e}_{\alpha(23)} \rangle$ . Для этого предварительно обобщим формулу (136 А), применив ортогональные собственные проекторы из § 2.5, которые проецируют в данном случае в трёхмерном евклидовом пространстве (или проективной гиперплоскости) ортогонально  $\langle \ker A' \rangle$ :

$$\mathbf{e}_\eta = \overrightarrow{AA'} \cdot \mathbf{e}_{\alpha(34)} / \| \overrightarrow{AA'} \cdot \mathbf{e}_{\alpha(34)} \|, \quad \text{где } A = \{ \mathbf{e}_{\alpha(12)} \mathbf{e}_{\alpha(23)} \} \text{ есть } 2 \times n\text{-матрица.}$$

(В трёхмерном пространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle \subset \langle P^{3+1} \rangle$  этот же вектор можно вычислить через внешнее произведение  $\mathbf{e}_{\alpha(12)}$  и  $\mathbf{e}_{\alpha(23)}$ .) В данном случае  $\mathbf{e}_\eta$  – вектор направляющих косинусов условно ортогонального приращения общего движения по отношению к  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ :

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_{\alpha(12)} = \mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_{\alpha(23)} = 0.$$

В пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(3)}$  вектор  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  разлагается биортогонально на проекции:

$$\overline{\overline{\mathbf{th}}} \gamma_{34} = \overleftarrow{\mathbf{AA'}} \cdot \mathbf{th} \gamma_{34} \text{ и } \overline{\mathbf{th}} \gamma_{34} = \overrightarrow{\mathbf{AA'}} \cdot \mathbf{th} \gamma_{34}$$

с направляющими векторами  $\overline{\overline{\mathbf{e}}}_{\alpha(34)}$  и  $\overline{\mathbf{e}}_{\alpha(34)}$ . В  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(3)}$  эти проекции неискажаются и подчиняются теореме Пифагора.

Угол  $\varepsilon^*$  между  $\overline{\overline{\mathbf{th}}} \gamma_{34}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  выражается по формуле (159 А) и искажается, согласно (160 А). Угол между  $\overline{\overline{\mathbf{th}}} \gamma_{34}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  остаётся прямым, то есть не искажается, так как он в целом ортогонален  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ , или центризовано прямой, как в варианте 2 на рис. 4А.

\* \* \*

Кинематика поступательного движения материального тела в целом определяется по кинематике материальной точки – центра его инерции. Принципиальное отличие релятивистской кинематики материальной точки от нерелятивистской видно из нижеследующего сопоставления.

В пространстве-времени Лагранжа:

$$d\mathbf{x} = d\chi \cdot \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{x} &= d^2\chi \cdot \mathbf{e}_\beta = d^2\chi (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta) = \overline{\overline{d^2\chi}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \overline{d^2\chi} \cdot \mathbf{e}_\eta \equiv \\ &\equiv d(d\chi \cdot \mathbf{e}_\alpha) = [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi [\partial \mathbf{e}_\alpha]_{dx} = [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi \left\{ \|\partial \mathbf{e}_\alpha\| \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\|\partial \mathbf{e}_\alpha\|} \right\}_{dx} = \\ &= [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi [\partial \alpha]_{dx} \cdot \mathbf{e}_\eta \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} [\partial d\chi]_\alpha = \cos \varepsilon d^2\chi = \overline{\overline{d^2\chi}}, \\ d\chi [\partial \alpha]_{dx} = \sin \varepsilon d^2\chi = \overline{d^2\chi}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_\alpha(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{g}(t) dt;$$

$$\mathbf{g}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{e}_\beta(t) = \frac{\overline{\overline{d^2\chi}}}{dt^2} \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \frac{\overline{d^2\chi}}{dt^2} \cdot \mathbf{e}_\eta(t) = \overline{\mathbf{g}}(t) \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \overline{\mathbf{g}}(t) \cdot \mathbf{e}_\eta(t),$$

$$\bar{\bar{g}}(t) = \cos \varepsilon(t) \cdot g(t) = \left[ \frac{\partial}{\partial t^2} \right]_\alpha,$$

$$\frac{1}{\bar{g}}(t) = \sin \varepsilon(t) \cdot g(t) = \frac{d\chi}{dt} \cdot \left[ \frac{d\alpha}{dt} \right]_{dx} = v(t) \cdot w(t) \text{ и т. д.}$$

При указанном биортогональном разложении вектор  $\mathbf{e}_\eta$ , как и ранее, вычисляется, согласно (136А). Вращение  $w(t)$  не изменяет поступательный характер движения материального тела в целом.

В пространстве-времени Минковского:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)} &= d\chi^{(1)} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ d^2\mathbf{x}^{(m)} &= d^2\mathbf{x}^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\beta = d^2\mathbf{x}^{(m)} \cdot (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta) = \bar{\bar{d}^2\mathbf{x}}^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{d^2\mathbf{x}^{(m)}} \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ d\gamma &= dy \cdot \mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon \cdot dy \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot dy \cdot \mathbf{e}_\eta = \bar{d}y \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{dy} \cdot \mathbf{e}_\eta. \end{aligned} \quad (161A)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{sh} \gamma &= \frac{d\mathbf{x}}{dct} = \frac{d\chi}{dct} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \mathbf{th} \gamma &= \frac{d\mathbf{x}}{dct} = \frac{d\chi}{dct} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{ch} \gamma = \frac{dct}{dct} = \frac{dt}{d\tau} \quad (\mathbf{sh} \gamma = \mathbf{ch} \gamma \cdot \mathbf{th} \gamma). \end{array} \right.$$

В СТО дифференциалы  $d\mathbf{x}$  и  $d^2\mathbf{x}$  не суммируются, как выше, так как они находятся в различных  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и подлежат гиперболическому суммированию через углы движения  $\gamma^{(1)}$  и  $d\gamma = dy^{(m)}$  (см. гл. 5А). При интегральном неколлинеарном движении точечного объекта в общем случае непрерывно изменяются характеристический угол  $\gamma = \gamma^{(1)}$  (скалярное значение) и его вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha^{(1)}$ . Параметры исходных и интегральных углов движения представляются в  $\tilde{E}_1$ , в то время как приращение угла  $d\gamma = dy^{(m)}$  (дифференциал) представляется в мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$ . При вычислении ортопроекций этого дифференциала в  $\tilde{E}_m^{(2)}$ , согласно (145А), направляющие векторы  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_\eta$  выражаются условно в  $\tilde{E}_m$ .

Заметим, что  $d^2\mathbf{x}^{(m)}$  и  $d\gamma$  связаны через коэффициент пропорциональности  $dct$ , или дифференциал дуги:  $d^2\mathbf{x}^{(m)} = dy \cdot d\tau$ . Имеем:

$$c \cdot \frac{\bar{\bar{d}\gamma}}{d\tau} = \bar{\bar{g}}(\tau) = \cos \varepsilon \cdot g(\tau) - \text{тангенциальное внутреннее ускорение},$$

$$c \cdot \frac{1}{d\tau} = \frac{1}{\bar{g}}(\tau) = \sin \varepsilon \cdot g(\tau) - \text{нормальное внутреннее ускорение},$$

$$c \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \equiv \frac{d^2\mathbf{x}^{(m)}}{d\tau^2} = g(\tau) - \text{общее внутреннее ускорение}.$$

Причём  $g^2(\tau) = \bar{\bar{g}}^2(\tau) + \frac{1}{\bar{g}}^2(\tau)$  – теорема Пифагора в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$  или в  $\tilde{E}_m^{(2)}$ .

Напомним, что здесь и далее, согласно (119А),  $0 \leq \varepsilon \leq \pi$ . Соответственно в интервале  $0 \div \pi/2$  все косинусные скалярные проекции положительные, а в интервале  $\pi/2 \div \pi$  они же все отрицательные.

Из (122А) имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{ch} \gamma &= \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma \, d\gamma = \operatorname{sh} \gamma \, \overline{\overline{d\gamma}} = \overline{\overline{d \operatorname{ch} \gamma}} = d \frac{dct}{dct} = d \frac{dt}{d\tau}, \\ \operatorname{ch} \gamma &= \operatorname{ch} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma \, d\gamma = \frac{dct}{dct} = \frac{dt}{d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (162A)$$

Из (135А) с учётом того, что  $\operatorname{sh} \gamma = v^*/c$ ,  $\operatorname{sh} \gamma = v/c$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{sh} \gamma &= d(\operatorname{sh} \gamma \cdot e_a) = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{ch} \gamma \, d\gamma \cdot e_a + \sin \varepsilon \, d\gamma \cdot e_\eta, \\ \operatorname{sh} \gamma &= \operatorname{sh} \gamma \cdot e_a = \operatorname{sh} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} [\cos \varepsilon \cdot \operatorname{ch} \gamma \, d\gamma \cdot e_a + \sin \varepsilon \, d\gamma \cdot e_\eta]; \\ |d \operatorname{sh} \gamma|^2 &= \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma)^2 + (\sin \varepsilon \, d\gamma)^2 = \operatorname{ch}^2 \gamma \, d\xi^2 + d\eta^2 = \\ &= \cos^2 \varepsilon \, (d \operatorname{sh} \gamma)^2 + \sin^2 \varepsilon \, (d \operatorname{sh} \gamma)^2. \end{aligned} \right\} \quad (163A)$$

Из (138А) с учётом того, что  $\operatorname{th} \gamma = v/c$ ,  $\operatorname{th} \gamma = v/c$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{th} \gamma &= d(\operatorname{th} \gamma \cdot e_a) = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma \, d\gamma \cdot e_a + \sin \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \, d\gamma \cdot e_\eta, \\ \operatorname{th} \gamma &= \operatorname{th} \gamma \cdot e_a = \operatorname{th} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} [\cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma \, d\gamma \cdot e_a + \sin \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \, d\gamma \cdot e_\eta]; \\ |d \operatorname{th} \gamma|^2 &= \operatorname{sch}^4 \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma)^2 + \operatorname{sch}^2 \gamma \cdot (\sin \varepsilon \, d\gamma)^2 = \operatorname{sch}^4 \gamma \, d\xi^2 + \operatorname{sch}^2 \gamma \, d\eta^2 = \\ &= \cos^2 \varepsilon \, (d \operatorname{th} \gamma)^2 + \sin^2 \varepsilon \, (d \operatorname{th} \gamma)^2. \end{aligned} \right\} \quad (164A)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  – нормальные геодезические координаты на *подвижном единичном гиперболоиде II*. В этих формулах как гиперболический угол, так и направляющие векторы являются функциями соответствующего параметра движения, например  $\tau$  или  $t$ .

Собственная векторная скорость материальной точки выражается из (163А) в виде:

$$\begin{aligned} v^*(\tau) &= v^*(\tau) \cdot e_a(\tau) = v_0^* \cdot e_a(\tau_0) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \cos \varepsilon(\tau) \cdot \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \, d\tau \cdot e_a(\tau) + \\ &+ c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \sin \varepsilon(\tau) \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \, d\tau \cdot e_\eta(\tau) = \\ &= v_0^* \cdot e_a(\tau_0) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \overline{\overline{\frac{d\gamma}{d\tau}}} \, d\tau \cdot e_a(\tau) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\gamma}{d\tau} \, d\tau \cdot e_\eta(\tau) = \\ &= v_0^* \cdot e_a(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \bar{\bar{g}}(\tau) \, d\tau \cdot e_a(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\bar{\bar{g}}(\tau)} \, d\tau \cdot e_\eta(\tau), \end{aligned} \quad (165A)$$

где:  $\text{ch } \gamma(\tau) \cdot \bar{\bar{g}}(\tau) = \frac{\bar{\bar{d}v^*}}{d\tau} = \bar{\bar{g}}^*(\tau)$  – тангенциальное собственное ускорение, обобщающее (82А);

$\frac{\perp}{g}(\tau) = \frac{\perp}{d\tau} = \frac{\perp}{g}^*(\tau)$  – одинаковые нормальные проекции собственного и внутреннего ускорений. В отличие от  $\bar{\bar{g}}$  и  $\frac{\perp}{g}$ , характеристики  $\frac{\perp}{d\tau}$  и  $\frac{\bar{\bar{d}v^*}}{d\tau}$  в паре не подчиняются теореме Пифагора. Собственная скорость геометрически естественным образом представляется в квазидекартовых координатах в  $\langle E^{3+1} \rangle$  через тангенс сферического угла наклона мировой линии по отношению к  $\langle E^3 \rangle$  или в псевдодекартовых координатах в  $\langle P^{3+1} \rangle$  через синус гиперболического угла наклона мировой линии по отношению к тому же  $\langle E^3 \rangle^{(1)} \equiv \langle E^3 \rangle$  (см. рис. 2А).

Координатная векторная скорость материальной точки выражается из (164А) в виде:

$$\begin{aligned} v(t) &= v(t) \cdot e_a(t) = v_0 \cdot e_a(t_0) + c \cdot \int_{t_0}^t \cos \varepsilon(t) \cdot \text{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt \cdot e_a(t) + \\ &+ c \cdot \int_{t_0}^t \sin \varepsilon(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt \cdot e_\eta(t) = \\ &= v_0 \cdot e_a(t_0) + c \cdot \int_{t_0}^t \text{sch}^3 \gamma(t) \cdot \frac{\bar{\bar{d}v}}{dt} dt \cdot e_a(t) + c \cdot \int_{t_0}^t \text{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{\perp}{d\tau} dt \cdot e_\eta(t) = \\ &= v_0 \cdot e_a(t_0) + \int_{t_0}^t \text{sch}^3 \gamma(t) \cdot \bar{\bar{g}}[\tau(t)] dt \cdot e_a(t) + \int_{t_0}^t \text{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{\perp}{g}[\tau(t)] dt \cdot e_\eta(t), \end{aligned} \quad (166A)$$

где:  $t_0 = \tau_0$ ,  $t = t(\tau)$  по (85 А);

$$\text{sch}^3 \gamma[\tau(t)] \cdot \bar{\bar{g}}[\tau(t)] = \frac{\bar{\bar{d}v}}{dt} = \bar{\bar{g}}^{(1)}(t) \quad (167A)$$

– тангенциальное координатное ускорение, обобщающее (83 А);

$$\text{sch}^2 \gamma[\tau(t)] \cdot \frac{\perp}{g}[\tau(t)] = \frac{\perp}{d\tau} = \frac{\perp}{g}^{(1)}(t) \quad (168A)$$

– нормальное координатное ускорение. Обе эти характеристики также не подчиняются теореме Пифагора. Координатная скорость геометрически естественным образом представляется в псевдодекартовом базисе  $\tilde{E}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  через тангенс гиперболического угла наклона мировой линии по отношению к  $\langle E^3 \rangle^{(1)}$  (см. рис. 2А).

В том, что только *внутренние* ускорения подвержены биортогональному разложению по теореме Пифагора, имеется глубокий физический смысл. В самом общем виде этот факт обсуждается и объясняется далее в гл. 9А.

Собственное вектор-расстояние соответственно вычисляется двумя способами с идентичной разбивкой на три составляющие [ $t_0 = \tau_0$ ,  $v_0 = v_0^* = 0$ ;  $t = t(\tau)$ ]. Из (165А) и (166А) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_t(\tau) = \mathbf{x}_t(t) = \mathbf{x}_0 + (\Delta\mathbf{x})_1 + (\Delta\mathbf{x})_2 = \\ &= \mathbf{x}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \bar{\mathbf{g}}(\tau) \cdot \mathbf{e}_a(\tau) d\tau^2 + \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\mathbf{g}(\tau)} \cdot \mathbf{e}_{\eta}(\tau) d\tau^2 = \end{aligned} \quad (169\text{A})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{x}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{\mathbf{g}}^*(\tau) \cdot \mathbf{e}_a(\tau) d\tau^2 + \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\mathbf{g}(\tau)} \cdot \mathbf{e}_{\eta}(\tau) d\tau^2 \equiv \\ &\equiv \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \operatorname{sch}^3 \gamma(t) \cdot \bar{\mathbf{g}}[\tau(t)] \cdot \mathbf{e}_a(t) dt^2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \operatorname{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{1}{\mathbf{g}[\tau(t)]} \cdot \mathbf{e}_{\eta}(t) dt^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \bar{\mathbf{g}}^{(1)}(t) \cdot \mathbf{e}_a(t) dt^2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{\mathbf{g}^{(1)}(t)} \cdot \mathbf{e}_{\eta}(t) dt^2. \end{aligned} \quad (170\text{A})$$

При условии одновременности (85А), то есть по отношению к  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ , мировые точки в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  и в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  (гл. 5А) выражаются тождественно в следующих координатных формах:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \left| \frac{\mathbf{x}}{ct} \right| \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = \left| \frac{\mathbf{x}}{ct} \right|.$$

В свою очередь, изменение скалярного косинуса, согласно (162А), прямо пропорционально работе собственной силы (81А) при физическом движении той же материальной точки:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{ch} \gamma_0 &= \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma d\gamma \equiv \left. \frac{d \operatorname{ct}}{d \operatorname{ct}} \right|_{\tau_0}^{\tau} = \left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{\tau_0}^{\tau} \equiv \\ &\equiv 1/c^2 \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \cos \varepsilon(\tau) \cdot v^*(\tau) \cdot g(\tau) d\tau \equiv 1/c^2 \cdot \int_{t_0}^t \cos \varepsilon(t) \cdot v(t) \cdot g[\tau(t)] dt \equiv \end{aligned} \quad (171\text{A})$$

$$\equiv 1/c^2 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot g(\chi) d\chi \equiv 1/m_0 c^2 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot F(\chi) d\chi = 1/E_0 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \bar{\mathbf{F}}(\chi) d\chi = A/E_0,$$

$$\text{где } A = \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot F(\chi) d\chi = \int_{\chi_0}^{\chi} \bar{\mathbf{F}}(\chi) d\chi.$$

При  $\gamma_0^* = 0$  ( $v_0^* = v_0 = 0$ ) имеем:

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + A/E_0, \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} \gamma \cdot E_0 = E = m_0 c^2 + A = mc^2.$$

Следовательно, классическая формула для полной механической энергии Эйнштейна имеет *косинусную* и поэтому скалярную природу.

В процессе произвольного поступательного движения в  $\langle P^{3+1} \rangle$  полная энергия материального тела в каждой точке мировой линии есть скаляр мгновенного тензора энергии-импульса, подобный координатному времени (на гиперболоиде II). Им прямо пропорциональны аналогичные характеристики для полного импульса и полной массы (гл. 5А). В процессе физического движения все тригонометрические функции его гиперболического угла изменяются согласованно между собой:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \gamma &= \operatorname{sh} \gamma / \operatorname{th} \gamma = (\operatorname{sh} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \operatorname{sh} \gamma) / (\operatorname{th} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \operatorname{th} \gamma) = \operatorname{ch} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d(\operatorname{sh} \gamma / \operatorname{th} \gamma) = \\ &= \operatorname{ch} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \operatorname{ch} \gamma.\end{aligned}$$

Причина этого состоит в том, что синус и тангенс имеют один и тот же направляющий вектор  $\mathbf{e}_a$ .

Вектор-импульс изменяется как *синусная* векторная характеристика

$$\mathbf{p} = m_0 c \cdot \mathbf{sh} \gamma = m_0 \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{p}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{ch} \gamma \cdot \bar{\bar{F}}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_a(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{F}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_n(\tau).$$

В свою очередь, полная масса, полный импульс и полная энергия изменяются как родственные скалярные *косинусные* характеристики. Поэтому для синусных и косинусных характеристик имеют место инвариантные соотношения в 3-х тождественных формах:

$$m_0^2 = m^2 - (\mathbf{p}/c)' \cdot \mathbf{p}/c \leftrightarrow P_0^2 = P^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} \leftrightarrow E_0^2 = E^2 - (\mathbf{p}c)' \cdot \mathbf{p}c;$$

где  $\mathbf{p} = m_0 c \cdot \mathbf{sh} \gamma = P_0 \cdot \mathbf{sh} \gamma$ ,  $m = m_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma$ ,  $P = P_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma$ ,  $E = E_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma$ .

Весьма интересно, что из (120А) и (135А) для поступательного (в прямом смысле) неколлинеарного движения тела следует *сугубо математически* эффект его особой релятивистской *ортосферической* прецессии с отвечающими ей формально моментом количества движения и главным моментом (нейнериционной природы в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ):

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= -\operatorname{th}(\gamma/2) \cdot \sin \varepsilon(\gamma) d\gamma = -[\operatorname{th} \gamma \cdot \sin \varepsilon(\gamma) d\gamma] / (1 + \operatorname{sch} \gamma), \\ d\theta/d\tau &= -\sin \varepsilon(\tau) \cdot c/R(\tau) \cdot \operatorname{th} [\gamma(\tau)/2] = -\sin \varepsilon(\tau) \cdot \eta_k(\tau) \cdot \operatorname{th} [\gamma(\tau)/2]. \end{aligned} \right\} \quad (172\text{A})$$

Ортосферическая прецессия (буст) понимается здесь наиболее общо, нежели конкретная прецессия Томаса для спина электрона. Она обусловлена именно структурой псевдоевклидова пространства-времени [32, с. 152]. Однако эта прецессия имеет *относительный* характер, так как псевдодекартов базис в данной точке мировой линии

всегда можно выбрать так, что в ней ортогональная составляющая кривизны (ускорения) будет уничтожена, то есть  $\sin \varepsilon = 0$ . В таком *абсолютном* мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$  ось стрелы времени направлена по вектору мгновенной касательной, а  $\langle E^3 \rangle^{(m)}$  обязательно содержит мгновенную псевдонормаль. (Об абсолютных базисах подробно сказано в заключительной главе 10А.) Например, для плоской криволинейной мировой линии, отвечающей некоторому неравномерному *прямолинейному* физическому движению, вышеуказанный абсолютный базис является неизменным. Критерий, определяющий такой тип мировой линии, есть нулевое кручение при ненулевой кривизне. Поэтому для данного типа движения ортосферическая прецессия является кажущейся (артефактной) характеристикой. В более общем случае – для закрученной мировой линии ортосферическая прецессия сохраняет свой относительный характер, но выбором базиса она может быть уничтожена только *локально*. Знак « $\leftarrow$ » в формулах (172А) иллюстрирует тот факт, что в гиперболической геометрии и в СТО ортосферическая ротация (буст) в мгновенной евклидовой плоскости суммирования движений направлена против направления этого суммирования, в том числе при дифференциальных приращениях движения.

В свою очередь, при значениях  $\varepsilon = \pi/2$  и  $\gamma \rightarrow 0$  имеем:

$$\frac{d\theta}{dt} \approx -v \cdot \frac{\perp}{g}/2c^2; \quad L = J_0 \cdot \frac{d\theta}{d\tau} \approx J_0 \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad M = \frac{dL}{d\tau} \approx \frac{dL}{dt} \approx -J_0/2c^2 \left( \frac{\perp}{g \cdot g} + v \cdot \frac{dg}{dt} \right).$$

Заметим, что в изложенной *относительной* тригонометрической трактовке кинематики и динамики абсолютного (мирового) движения материальных тел в  $\langle P^{3+1} \rangle$  природа активной собственной силы  $F$  и вызываемого ею внутреннего ускорения  $g = F/m_0$  не имеет значения. *Абсолютная* тригонометрическая трактовка движения материи по мировым линиям в  $\langle P^{3+1} \rangle$  рассматривается в последней главе 10А.

## Глава 8А. Тригонометрические модели движений в сферической геометрии

Квазиевклидово пространство  $\langle Q^{n+1} \rangle$ , то есть таковое с индексом  $q=1$ , с вложенным в него односвязным гиперсфериодом радиуса  $R$  определяется аналогично псевдоевклидову пространству Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$  с вложенными в него гиперболоидами I и II (§§ 6.3, 12.3). В задании  $\langle Q^{n+1} \rangle$  существенную роль играет рефлектор-тензор  $I^\oplus$ , как и в задании псевдоевклидова пространства Минковского. Однако при этом квазиевклидово пространство в целом имеет евклидову метрику. Составной частью его геометрии является квазиевклидова тригонометрия. Квазиевклидово пространство с индексом  $q = 1$  в каком-либо квазидекартовом базисе представляется прямой сферически ортогональной суммой двух вещественных пространств:

$$\langle Q^{n+1} \rangle \equiv \langle E^n \rangle \oplus \overset{\rightarrow}{y} \equiv \text{CONST}, \quad (173A)$$

где  $\langle E^n \rangle$  – евклидово подпространство,  $\overset{\rightarrow}{y}$  – ориентированная реперная ось для отсчёта угла основной сферической ротации  $\varphi$ .

С точки зрения квазиевклидовой тригонометрии в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  подпространство  $\langle E^n \rangle$  – тангенсная гиперплоскость,  $\overset{\rightarrow}{y}$  – косинусная ось. Заметим, что мнимонизация реперных осей  $\overset{\rightarrow}{y}$  трансформирует  $\langle Q^{n+1} \rangle$  в комплексное псевдоевклидово пространство индекса 1 (§ 10.3) – изоморфизм псевдоевклидова пространства Минковского. В  $\langle Q^{2+1} \rangle$  реализуется двумерная сферическая геометрия на вложенной сфере.

В  $\langle Q^{n+1} \rangle$  как исходно аффинном пространстве допускается операция параллельного переноса (в евклидовом смысле). Кроме того, в ориентированном квазиевклидовом пространстве допускаются такие линейные ортогональные преобразования, которые сохраняют пространственную структуру (173A) и исходную правую ориентацию базисов. Это сферические ротации двух типов:

$$\langle \text{rot } \Phi \rangle: \text{rot } \Phi \cdot I^\oplus \cdot \text{rot } \Phi = I^\oplus = \text{rot } (-\Phi) \cdot I^\oplus \cdot \text{rot } (-\Phi) \quad (174A)$$

– основные сферические ротации;

$$\langle \text{rot } \Theta \rangle: \text{rot}' \Theta \cdot I^\oplus \cdot \text{rot } \Theta = I^\oplus = \text{rot } \Theta \cdot I^\oplus \cdot \text{rot}' \Theta \quad (175A)$$

– ортосферические ротации (ортогональные по отношению к предыдущим).

Итак, квазиеуклидово пространство  $\langle Q^{n+1} \rangle$  определяется как евклидовой метрикой, так и рефлектор-тензором  $I^\oplus$ , задающим допустимые в нём преобразования (вместе с евклидовым параллельным переносом). Соответственно в этом пространстве применяются квазидекартовы базисы вида:

$$\tilde{E} = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \Theta \cdot \text{rot } \tilde{\Phi} \cdot \tilde{E}_1 = T \cdot \tilde{E}_1, \quad (176A)$$

где  $\tilde{E}_1$  – какой-либо исходный универсальный базис. Именно в этом пространстве реализуется бинарная квазиеуклидова тригонометрия индекса 1 в правых базисах. На вложенном в него гиперсферионде реализуется сферическая геометрия и сферическая тригонометрия того же индекса 1. В универсальных базисах имеет место сферическо-гиперболическая аналогия абстрактного и конкретного типов (§§ 6.1, 6.2). В частности, общая тригонометрическая ротация  $T$  определяется по аналогии со (111А) в форме *квазиполярного* представления:

$$T = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{rot } \tilde{\Phi}. \quad (177A), (178A)$$

Здесь используется абстрактная аналогия типа (323), когда осуществляется трансформация:

$$\Gamma \rightarrow i\Gamma \rightarrow \Phi \quad (\gamma \rightarrow i\gamma \rightarrow \varphi),$$

$$\text{roth } \Gamma \rightarrow \text{rot } i\Gamma \rightarrow \text{rot } \Phi.$$

Матрица основной сферической ротации  $\text{rot } \Phi$  (то есть ротации с реперной осью), согласно (314), имеет каноническую структуру в  $\tilde{E}_1$ , отвечающую рефлектор-тензору как указано ниже:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \text{rot } \Phi & & I & \\ \hline & \cos \varphi \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}_a} \overrightarrow{\mathbf{e}'_a} + \overrightarrow{\mathbf{e}_a} \overleftarrow{\mathbf{e}'_a} & -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_a & I_{n \times n} & \mathbf{0} \\ \hline & + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}'_a & \cos \varphi & \mathbf{0}' & -1 \\ \hline \end{array} \quad (179A)$$

С другой стороны, ортогональная матрица  $\text{rot } \Theta$  в базисе своего действия, согласно (497), отвечает рефлектор-тензору по схеме (110А). В связи с вышеуказанной аналогией в исходных универсальных базисах формулы гиперболической геометрии (гл. 7А) весьма логично преобразуются в формулы сферической геометрии. Если перейти от угла движения к мере Ламберта – гиперболической и сферической

$$\begin{aligned} a_{(h)} &= \gamma \cdot R, \\ a_{(s)} &= \varphi \cdot R, \end{aligned} \quad (180)$$

то обе геометрии (в малом) также переходят друг в друга во внутренней и внешней интерпретациях. Поэтому далее приводится, главным образом, сводка формул движений в сферической геометрии с небольшими пояснениями. Заметим, что движения в сферической геометрии и в эллиптической геометрии Римана в достаточно ограниченной области изоморфны в силу изоморфности этих геометрий в малом. Поэтому конечные результаты в *скалярной* форме, относящиеся только к внутренней геометрии, имеют место в обеих геометриях.

Для двухступенчатого неколлинеарного движения по гиперсфериоду в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_3 &= \{\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12}\}_{\tilde{E}_1} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \tilde{E}_1 = \\ &= T \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{rot } \tilde{\Phi}_{13} \cdot \tilde{E}_1\end{aligned}\quad (181A)$$

– аналог формулы (111 А);

$$\text{rot } \tilde{\Phi}_{13} = \text{rot}' \Theta_{13} \cdot \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \quad (182A)$$

– аналог формулы (112А);

$$\text{rot } \Phi_{13} = \sqrt{\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } 2\Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12}} = \sqrt{\text{rot } 2\Phi_{13}}, \quad (183A)$$

$$\text{rot } \Theta_{13} = \text{rot}' \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \cdot \text{rot}' \Phi_{23} \quad (184A)$$

– аналоги формул (114 А), (115 А), где корни тригонометрические (§5.6).

В случае  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  при перемене порядка последовательности двух сферических движений на противоположный новый квазидекартов базис задаёт матрица – *квазианалог*  $T'$  из (116 А):

$$\begin{aligned}\tilde{E}'_3 &= \{\text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12}\} = T^* = \\ &= \{\text{rot } \tilde{\Phi}_{13} \cdot \text{rot } (-\Theta_{13})\} = \{\text{rot } (-\Theta_{13}) \cdot \text{rot } \Phi_{13}\}.\end{aligned}\quad (185A)$$

Формально преобразование  $T^*$  выводится из  $T$  через операцию простого транспонирования, но при этом реализуемой в бинарном комплексном базисе (443) из § 10.3. Для обратного порядка движений имеем:

$$\text{rot } \tilde{\Phi}_{13} = \sqrt{\text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } 2\Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23}} = \sqrt{\text{rot } 2\tilde{\Phi}_{13}}, \quad (186A)$$

$$\text{rot } (-\Theta_{13}) = \text{rot}' \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{13} = \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot}' \Phi_{13} \quad (187A)$$

– аналоги формул (117А), (118А), где корни тригонометрические.

Здесь также сохраняется двойственность во взгляде на ротацию  $\text{rot } \Theta$ . С одной стороны, она связана с возникающим сферическим сдвигом при суммировании частных неколлинеарных движений

*неточечных объектов.* С другой стороны, согласно (112А), она же преобразует модально основную суммарную ротацию  $\text{rot } \Phi$  при перемене порядка последовательности двух частных движений на противоположный. Связь между двумя вариантами двухступенчатого сферического движения (прямым и обратным) сводится к замене частных углов по схеме:

$$\varphi_{12} \leftrightarrow \varphi_{23}, \quad \alpha_k \leftrightarrow \beta_k \quad (188\text{A})$$

– аналог (121А).

Перемножая элементы матриц в (183А) или применяя аналогию абстрактного типа, получаем формулы двухступенчатого движения в  $\langle Q^{n+1} \rangle$ . Например, в косинусной интерпретации имеем:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{13} &= \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} - \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{23} = \\ &= \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos A_{123} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{23} \end{aligned} \quad (189\text{A})$$

$$(A_{123} = \pi - \varepsilon).$$

Отсюда непосредственно видна независимость суммарного скалярного угла движения от порядка последовательности двух частных движений. Это классическая *скалярная* формула сферической геометрии и эллиптической геометрии Римана. При движении по гиперсфериоиду с возрастанием значений направленной ординаты  $\vec{y}$  все  $\varphi > 0$ . В связи с этим обстоятельством для положительных углов движения  $\varphi$  (и расстояний по метрике Ламберта) с учётом (189А) следует правило “параллограмма”, как в евклидовой геометрии:

$$|\varphi_{12} - \varphi_{23}| \leq \varphi_{13} \leq \varphi_{12} + \varphi_{23} \quad (190\text{A})$$

– аналог (123А). Неравенства (190А) и  $\varphi > 0$  относят расстояние в сферической геометрии в категорию норм. Заметим, что в тангенсной модели, или в проективной модели Клейна гиперсфериоид в целом отображается на всю *двухстороннюю* (замкнутую) проективную гиперплоскость  $\langle E^n \rangle$  (§ 12.1), то есть он гомеоморден ей.

Соответствующие формулы для скалярных синуса и тангенса – аналоги (124А) и (125А) даются с учётом *теоремы о приведении к биортогональной (квадратичной) некоммутативной форме* (гл. 7А):

$$\sin^2 \varphi_{13} = (\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \cos \varphi_{12})^2 + (\sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23})^2, \quad (191\text{A})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{23}^2 &= [(\operatorname{tg} \varphi_{12} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})]^2 + \\ &+ [(\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \sec \varphi_{12}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})]^2. \end{aligned} \quad (192\text{A})$$

Для условно ортогональных частных движений из (189А) следует мультиплекативная косинусная формула, трактующая скалярно их суммирование как *интегральный* аналог теоремы Пифагора:

$$\cos \varphi_{13} = \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} \quad (\varepsilon = \pm \pi/2). \quad (193\text{A})$$

При движении по  $n$ -мерному гиперсфериду количество последовательных независимых, условно ортогональных отрезков (углов) не может превышать число « $n$ ». Применяя также последовательно (193А), получаем общую мультиплекативную косинусную формулу

$$\cos \varphi_{1t} = \prod_{\substack{i=1, t-1 \\ j=2, t}} \cos \varphi_{ij} \quad (\varepsilon = \pm \pi/2), \quad \text{где } 3 \leq t \leq n.$$

Суммирование условно ортогональных движений в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  в скалярном варианте коммутативно. Например, протяжённость суммы таких движений вычисляется в виде

$$a_{1t} = R \cdot \arccos \prod_{\substack{i=1, t-1 \\ j=2, t}} \cos a_{ij} / R.$$

Кроме того, многозвенные косинусные формулы для условно ортогональных движений в обеих геометриях представляются в аддитивной форме через логарифмические меры:

$$\ln \cos \varphi \equiv \ln \cos a / R \quad \text{и} \quad \ln \operatorname{ch} \gamma \equiv \ln \operatorname{ch} a / R.$$

Общие мультиплекативные и аддитивные соотношения для скалярной суммы условно ортогональных движений являются *интегральными* аналогами теоремы Пифагора в неевклидовой геометрии.

Как и ранее, особый случай соответствует ортогональной (*теперь не условно!*) сумме бесконечно малых частных углов движения:

$$\lim \varphi_{13} = \sqrt{\varphi_{12}^2 + \varphi_{23}^2}, \quad \theta_{13} = \varphi_{12} \cdot \varphi_{23} / 2 \rightarrow 0;$$

$$\varphi_{12} \rightarrow 0$$

$$\varphi_{23} \rightarrow 0$$

$$\lim \varphi = \sqrt{\sum_{j=1}^k \varphi_{(j)}^2}, \quad dv = d\varphi_{(1)} \dots d\varphi_{(k)} \cdot R^k \quad (k \leq n).$$

Здесь имеет место коммутативность частных углов движения в скалярной и векторной формах. Например, первый дифференциал общего угла движения представляется в двух вариантах – аналогах (144А) и (145А):

$$(d\varphi)^2 = \sum_{j=1}^n [d\varphi_{(j)}]^2, \quad (194\text{A})$$

$$\left. \begin{aligned} d\phi = \bar{\bar{d}\phi} \cdot e_\alpha + \frac{1}{d\phi} \cdot e_\eta = d\phi \cdot e_\beta, \\ (d\phi)^2 = (\bar{\bar{d}\phi})^2 + (\frac{1}{d\phi})^2. \end{aligned} \right\} \quad (195A)$$

Ввиду того, что при непрерывных движениях в  $\langle P^{n+1} \rangle$  или в  $\langle Q^{n+1} \rangle$ , отображаемых непосредственно траекториями на собственных гиперповерхностях, характеристический радиус постоянен ( $R = \text{const}$ ), то аналогичная инфинитиземальная теорема Пифагора имеет место для соответствующих дифференциалов длин ортогональных приращений отрезков, выраженных мерой Ламберта. В первом варианте имеем:

$$(da)^2 = \sum_{j=1}^n [da_{(j)}]^2. \quad (196A)$$

Например, это может быть первая каноническая квадратичная форма римановой поверхности постоянной кривизны, выраженная в текущих ортогональных криволинейных координатах Гаусса. Во втором варианте имеем:

$$\left. \begin{aligned} da = \bar{\bar{da}} \cdot e_\alpha + \frac{1}{da} \cdot e_\eta = da \cdot e_\beta, \\ (da)^2 = (\bar{\bar{da}})^2 + (\frac{1}{da})^2. \end{aligned} \right\} \quad (197A)$$

Например, это может быть разложение первого дифференциала  $da = R^{(m)}d\gamma$  или  $da = R^{(m)}d\phi$  на тангенциальную и нормальную орто-проекции в соприкасающейся псевдо/квазиплоскости к криволинейному участку линии движения в окрестности точки  $M$  с мгновенным радиусом псевдо/квазикривизны  $R^{(m)}$ .

С другой стороны, во внешней тригонометрии гиперсфера в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  имеют место векторные формулы для синуса и тангенса суммы двух движений:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{13} = \sin \varphi_{13} \cdot e_\sigma &= (\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \cos \varphi_{12}) \cdot e_\alpha + \\ &+ \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot e_\eta, \end{aligned} \quad (198A)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{13} = \operatorname{tg} \varphi_{13} \cdot e_\sigma &= [(\operatorname{tg} \varphi_{12} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})] \cdot e_\alpha + \\ &+ [(\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \sec \varphi_{12}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})] \cdot e_\eta \end{aligned} \quad (199A)$$

– аналоги формул (135А) и (138А) с той же геометрической интерпретацией, но в сферическом варианте.

Далее рассмотрим *внешнюю* векторную тригонометрию единичного гиперсфера ( $R = 1$ ).

\* \* \*

Имеем:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_a \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{при } \Delta y > 0: \varphi > 0) \quad (200A)$$

–  $n \times 1$  единичный радиус-вектор точки гиперсфера. Метрический инвариант выражается в виде:

$$\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e} = \sin' \varphi \cdot \sin \varphi + \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi \cdot \mathbf{e}_a' \mathbf{e}_a + \cos^2 \varphi = 1 = 1^2. \quad (201A)$$

Остальные тригонометрические функции получаются делением базового элемента  $\mathbf{e}$  либо на  $\cos \varphi$ , либо на  $\sin \varphi$ . Далее,

$$\sec \varphi = \sec \varphi \cdot \mathbf{e} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot \mathbf{e}_a}{1} - n \times 1 \text{ радиус-вектор секанса, конец}$$

которого лежит на тангенсной евклидовой гиперплоскости;

$$\operatorname{cosec} \varphi = \operatorname{cosec} \varphi \cdot \mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_a}{\operatorname{ctg} \varphi} - n \times 1 \text{ радиус-вектор косеканса, конец кото-}$$

рого лежит на котангенсной цилиндрической евклидовой гиперповерхности.

Сферическое преобразование (движение) какого-либо точечного элемента  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  единичного гиперсфера в активной форме в  $\tilde{E}_1$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \mathbf{e}_3 \\ \sin \varphi_{13} \cdot \mathbf{e}_a \\ \cos \varphi_{13} \end{matrix} &= \operatorname{rot} \Phi_{13} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rot} \Phi_{12} \cdot \operatorname{rot} \Phi_{23} \cdot \operatorname{rot} (-\Theta_{13}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \operatorname{rot} \Phi_{12} \cdot \operatorname{rot} \Phi_{23} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rot} \Phi_{12} \cdot \operatorname{rot} \Phi_{23} \cdot \operatorname{rot}' \Phi_{12} \cdot \operatorname{rot} \Phi_{12} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \quad (202A) \\ &= \{\operatorname{rot} \Phi_{12} \cdot (\operatorname{rot} \Phi_{23})_{\tilde{E}_2} \cdot \operatorname{rot}' \Phi_{12}\}_{\tilde{E}_1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \sin \varphi_{12} \cdot \mathbf{e}_a \\ \cos \varphi_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Траектория сферического (геодезического) движения  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  принадлежит сечению гиперсфера плоскостью ротации матрицы  $\{\operatorname{rot} \Phi_{12} \cdot \operatorname{rot} \Phi_{23} \cdot \operatorname{rot}' \Phi_{12}\}$ . Аналитически она производится при непрерывном преобразовании  $\mathbf{e} \rightarrow (\mathbf{e} + d\mathbf{e})$  путём изменения в матрице  $\operatorname{rot} \Phi_{23}$  значения скалярного угла от 0 до  $\varphi_{23}$  при  $\mathbf{e}_\beta = \text{const}$ . В модели Клейна, или тангенсной модели эта траектория отображается прямолинейным отрезком  $\operatorname{tg} \varphi_{23}$  на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ ». На гиперсфере нетрудно реализовать сферический треугольник (и далее другие многоугольники) через квазиполярное представление:

$$\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \mathbf{u}_1 = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3,$$

$$\text{rot } \Phi_{12} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \{\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12}\} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3.$$

Централизованный треугольник  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$  трансформируется в произвольный путём активного преобразования координат в том же  $\tilde{E}_1$ .

Вышеизложенное иллюстрирует хорошо известный факт (теорему) сферической геометрии: любые две *неполярные* точки сферы можно соединить на ней кратчайшим евклидовым расстоянием по однозначной дуге некоторой большой окружности (геодезической). Это же даёт указанный *матричный* способ решения такой задачи в исходном централизованном декартовом базисе  $\tilde{E}_1$ . Причём в базисе  $\tilde{E}_2 = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1$  угол  $(\pi/2 - \varphi_{23})$  есть широта элемента  $\mathbf{e}_3$  в *глобусных координатах*. В этом базисе движение  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  реализуется по меридиану, а долгота не меняется. Элементы соединяются кратчайшей дугой с расстоянием  $a_{23} = R \cdot \varphi_{23}$ . Как видно из (202А), при движении *точечного* элемента ортосферический сдвиг  $\theta_{13}$  фактически аннигилирует. Но этот сдвиг проявлял бы себя обязательно при двухступенчатом движении неточечного объекта, например, задаваемого линеором (см. § 5.1).

Отметим, что в двумерной сферической геометрии угол  $\theta$  есть *эксцесс* сферического треугольника или более сложной – составной фигуры. Он направлен именно в сторону суммирования отрезков.

\* \* \*

Используя квазиполярное представление (177А), (178А), находим в общем виде закон и формулы для суммирования многоступенчатых движений в сферической геометрии как внешней, так и внутренней в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  – аналоги соотношений (153А)–(155А). При этом *скалярные формулы* имеют место и в эллиптической геометрии Римана. Имеем:

$$T = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{rot } \tilde{\Phi} = \\ = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline (1 - \cos \varphi) \cdot \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\sigma' + \text{rot } \Theta_{n \times n} & -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ \hline + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma' & \cos \varphi \\ \hline \end{array}}. \quad (203A)$$

Здесь  $\text{rot } \Theta$  выражается канонической формой типа (497). Далее,

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\varphi &= s_{nn}; \quad \cos \varphi = +\sqrt{(1 + s_{nn})/2}, \quad \sin \varphi = +\sqrt{(1 - s_{nn})/2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= +\sqrt{(1 - s_{nn})/(1 + s_{nn})} = \sin \varphi / \cos \varphi; \\ \cos \sigma_k &= s_{nk} / \sqrt{1 - s_{nn}^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \cos \sigma_k \cdot \operatorname{tg} \varphi = s_{nk} / (1 + s_{nn}); \\ \cos \theta &= (\operatorname{tr} \text{rot } \Theta - 2)/(n - 1) = \mathbf{e}_\sigma' \cdot \mathbf{e}_\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (204A)$$

Здесь же укажем структуру специфической матрицы  $T^*$  типа (185 А) для обратного порядка последовательности частных движений:

$$T^* = \text{rot } \tilde{\Phi} \cdot \text{rot } (-\Theta) = \text{rot } (-\Theta) \cdot \text{rot } \Phi$$

$(1 - \cos \varphi) \cdot e_{\bar{\sigma}} e_{\sigma}' + \text{rot } \Theta_{n \times n}$	$-\sin \varphi \cdot e_{\bar{\sigma}}$
$+\sin \varphi \cdot e_{\sigma}'$	$\cos \varphi$

Таким образом, тензорная тригонометрия содержит достаточно общий и эффективный инструментарий для изучения и описаний в едином ключе движений в псевдоевклидовых и в (квази)евклидовых пространствах. В частности, описанные в гл. 5А – 8А закономерности этих движений являются существенной частью неевклидовых геометрий в малом, реализуемых в подпространствах постоянной кривизны.

Как известно [21, 24], исторически изначально Ламберт и Тауринус сделали первые шаги в направлении создания неевклидовой геометрии гиперболического типа, выдвинув её аналогию с геометрией сферы. Они же определили таковую как геометрию на сфере мнимого радиуса. Впоследствии благодаря исследованиям Клейна [25] стало ясно, что этот ранее гипотетический геометрический объект есть гиперболоид II Минковского. В данной главе был сделан шаг в обратном направлении. А именно установленные ранее в гл. 7А закономерности движений в гиперболической геометрии на основе сферическо-гиперболической аналогии трансформированы далее в соответствующие закономерности движений в сферической геометрии. С применением общих методов тензорной тригонометрии между движениями в обеих геометриях постоянного радиуса продемонстрирована определённая взаимосвязь.

На наш взгляд, представляет особый интерес предпринять когда-нибудь *совместное изложение* обеих неевклидовых геометрий постоянного радиуса с их неискажаемой интерпретацией на собственных гиперповерхностях – гиперсфераиде в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  и гиперболоидах в  $\langle P^{n+1} \rangle$ . В рамках геометрий в малом их объединяют общие методы тензорной тригонометрии, в рамках геометрий в целом – тригонометрические модели, отображаемые на проективной двухсторонней (замкнутой) гиперплоскости и на проективном одностороннем (замкнутом) гиперцилиндре (гл. 5, 6, 11 и 12).

## **Глава 9А. Необходимо ли искривление пространства-времени в поле тяготения? (\*)**

*Специальная теория относительности* (СТО) формулирует законы движения материи при абстрактно предполагаемом отсутствии именно поля тяготения, причём как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчёта [8, 32]. Тензорно-тригонометрические возможности для этого были продемонстрированы в гл. 2А – 7А. Исходя из преобразований Лоренца для координат пространства и времени Пуанкаре в 1905г. выдвинул революционную (но оставшуюся практически незамеченной современниками) идею единого комплексного пространства-времени с псевдоевклидовой метрической формой [39; 37, с. 107; 66]. Пуанкаре ввёл *минимую* координату времени и для неё особый масштабный коэффициент однородности – константу «*c*». (Существенно то, что реальная скорость света не всегда совпадает с этим коэффициентом, но не превышает его.) Впоследствии Минковский в 1907 – 1908 гг. предложил развернутую *овеществлённую* модель псевдоевклидова пространства-времени [36; 37, с. 41]. Минковский также ввёл в релятивистскую теорию понятия о времени- и пространствуподобных интервалах, изотропном конусе и т. д. Изложенные им идеи быстро получили всеобщее признание, так как почва для этого уже созрела.

Ещё ранее в рамках динамики и теории тяготения Ньютона неизбежно встали вопросы о происхождении силы инерции и силы тяготения материи. Сам Ньютон для объяснения инерции постулировал некое абсолютное пространство наряду с абсолютным временем и таким образом он придал инерции и ускорению абсолютный смысл.

Max (1883 г.), хотя и подверг известной критике эти взгляды Ньютона, но по существу он конкретизировал абсолютное пространство, связав его со звёздной системой Вселенной [37, с. 249 – 250]. В теории Maxa, имеющей качественный и более философский характер, инерция и ускорение определяются по отношению к некоторой выделенной системе отсчёта  $\tilde{E}_0$ , связанной с неподвижной в ней массой Вселенной в целом (*принцип Maxa*). При этом их абсолютный смысл сохраняется. Система отсчёта Maxa, в свою очередь, задаёт бесконечное множество галилеевски инерциальных систем отсчёта  $\langle \tilde{E}_j \rangle$  (псевдодекартовых базисов). По определению, такие системы совершают равномерное

(\*) Заключительные главы 9А и 10А имеют дискуссионный характер.

поступательное и прямолинейное движение по отношению к  $\tilde{E}_0$ . Например, с довольно высокой точностью они могут быть связаны с центрами масс каких-либо звёздных объектов, в том числе Солнца.

В связи с разработкой *общей теории относительности* (ОТО) Эйнштейн обратил особое внимание на эмпириокритические высказывания Маха по вопросам механики и философии познания. Эйнштейн впервые чётко и явно сформулировал закон о тождестве инерционной и тяготеющей масс для любого материального объекта. Этот закон использовался в неявном виде уже изначально в классической динамике, теории тяготения и в объединяющей их небесной механике. Как фундаментальный закон Природы он действует и в классических и в релятивистских формах. Независимость гравитационного ускорения от природы вещества экспериметально установил Ньютон и с высокой точностью подтвердил Этвёш в 1909 г. [19]. Возникла идея об одной и той же – *гравитационной* природе сил инерции и тяготения. Ввиду этого Эйнштейн выдвинул *принцип эквивалентности*, в котором он полностью математически и физически отождествил инерцию и тяготение как дублирующие друг друга тензорные понятия [49].

С другой стороны, исходя из принципа Маха закон о тождестве масс можно объяснить тем, что для данного материального тела сила тяготения вызывается *активным* гравитационным воздействием на него со стороны других материальных объектов, а сила инерции вызывается *пассивным* гравитационным воздействием на него со стороны материи Вселенной в целом. Активное гравитационное воздействие вызывает ньютонову силу притяжения, а пассивное вызывает силу сопротивления ускорению. В собственном базисе, связанном с центром массы тела (материальной точкой), обе силы точь-в-точь прямо пропорциональны его массе как некоторому вещественному “гравитационному заряду”. Поэтому в такой трактовке второй закон механики Ньютона становится естественным дополнением к его же закону всемирного тяготения. Для придания второму закону аналогичного *всемирного* характера, но в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , необходимо с учётом СТО перейти от внутреннего ускорения к его же абсолютному, прямо пропорциональному геометрическому аналогу – гиперболической кривизне мировой линии:

$$-F_{(i)} = F = m_0 \cdot g_{(i)} = m_0 \cdot c^2 / R_{(i)} = E_0 / R_{(i)}, \quad (205A)$$

где  $F$  – активная собственная сила любого происхождения, вызывающая отклонение абсолютного движения материальной точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$  от прямолинейности;

$F_{(i)}$  – противодействующая ей пассивная собственная сила инерции (именно она всегда прямо пропорциональна нулевой массе  $m_0$ );

$m_0$  и  $E_0$  – масса и эйнштейнова энергия покоя материальной точки как её инерционно-тяготеющие характеристики в собственном псевдодекартовом базисе  $\tilde{E}_m$ ;

$R_{(i)} = 1/K_{(i)} = E_0 / F$  – радиус мгновенной абсолютной гиперболической кривизны мировой линии, вычисляемый в соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle \subset \langle P^{3+1} \rangle$  в мировой точке местоположения массы  $m_0$  (гл. 5А); в ином виде  $E_0 = F \cdot R_{(i)}$  выступает как модуль главного момента активной силы  $F$ , вызывающей гиперболическую ротацию;  $c$  – постоянная скалярная псевдоскорость абсолютного движения любой материальной точки вдоль её мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  – характеристика, впервые введённая Пуанкаре [39] и равная его же масштабному коэффициенту (гл. 1А). В векторной форме она обычно именуется, согласно Пуанкаре, как 4-скорость.

В такой, как в формуле (205А), *небесной гравитационной* трактовке инерции  $F_{(i)}$  есть центростремительная сила, направленная всегда в  $\langle P^{3+1} \rangle$  к мгновенному центру касательной к мировой линии гиперболы (псевдоокружности). Как тут не вспомнить знаменитое изречение средневекового мыслителя Николая Кузанского: “Вселенная есть сфера, центр которой повсюду”.

*Небесная* форма (205А) для второго закона механики Ньютона, как и должно быть, согласуется с первым и третьим законами:

$$F = 0 \leftrightarrow g_{(i)} = 0 \leftrightarrow K_{(i)} = 0, \quad -F_{(i)} = F.$$

При действии на одну и ту же материальную точку одновременно нескольких разнонаправленных и даже разнородных активных *собственных* сил они и соответствующие им *внутренние* ускорения суммируются подобно векторам в мгновенном собственном евклидовом подпространстве  $\langle \mathcal{E}^{3,(m)} \rangle$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ :

$$-F_{(i)} = F = \sum_{j=1}^t F_j = \sum_{j=1}^t m_0 \cdot g_j = m_0 \cdot g, \quad (206A)$$

$$g = \sum_{j=1}^t g_j. \quad (207A)$$

Здесь принципиально то, что какие-либо  $F_j$  могут являться силой тяготения (в собственном подпространстве  $\langle \mathcal{E}^{3,(m)} \rangle$ ).

Аналогичным *геометрическим* образом суммируются частные векторные абсолютные гиперболические кривизны, задаваемые в одной и той же мировой точке:

$$k = \sum_{j=1}^t k_j. \quad (208A)$$

В любой точке мировой линии движения материального тела абсолютные кривизны суммируются ковариантно собственным силам и внутренним ускорениям. Как следствие этого, при тригонометрической согласованности частных кривизн, то есть при их тождественных собственных псевдоплоскостях, они как и углы (см. § 5.6 и § 6.2 – Правило №2) имеют свойство алгебраической аддитивности.

Заметим, что для *сферической* кривизны аналогия этому проявляется, например, в оптической формуле Ньютона, которую можно применять последовательно, но каждый раз в какой-то определённой точке линии хода луча света:

$$1/R_1 + 1/R_F = 1/R_2,$$

где  $R_F$  – фокусное расстояние линзы или зеркала либо положительное, либо отрицательное. (При акте отражения светового потока плоским зеркалом, для которого  $R_F = \pm \infty$  ( $K_F = 0$ ), направление и знак кривизны меняются на противоположные, а её модуль не изменяется.)

Согласно (207А), в конкретной точке мировой линии массы  $m_0$  коллинеарные внутренние ускорения (как и собственные силы) подлежат алгебраическому суммированию, а неколлинеарные – геометрическому евклидову суммированию как абсолютизированные понятия. В этом состоит принципиальное отличие характера суммирования (нерелятивистского) внутренних ускорений от характера суммирования (релятивистского) физических скоростей.

В абсолютном пространстве-времени Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$ , согласно его структуре (см. гл. 1А), системе отсчёта Маха  $\tilde{E}_0$  формально соответствуют собственные подпространства  $\langle E^3 \rangle^{(0)}$  и  $\tilde{c}^{(0)}$ . Последние уже с вполне материальным объяснением могут в некотором смысле трактоваться как “абсолютное пространство” и “абсолютное время” Ньютона. Хотя истинно *абсолютным пространством* в такой трактовке является только  $\langle P^{3+1} \rangle$  в целом. Оно понимается как пространство, само по себе, с теми или иными свойствами и в отличие от относительных пространств никуда не вложено.

Особо отметим, что в СТО с точки зрения любого галилеевски инерциального наблюдателя  $N_j$  непрямолинейно (или ускоренно) абсолютно движущаяся в  $\langle P^{3+1} \rangle$  псевдодекартова система отсчёта как мгновенный базис остаётся в том же инерциальном качестве  $\tilde{E}_m \subset \langle \tilde{E}_j \rangle$ . (Этот факт, в частности, использовался в гл. 5А и 7А.) Однако с точки зрения произвольно движущегося вместе с ней наблюдателя  $N_m$  эта система отсчёта  $\tilde{E}_m$  галилеевски неинерциальная. С математической позиции она есть гауссова криволинейная система координат. На этом основан релятивистский дуализм (терминология автора) в двояком описании ускоренных движений в  $\langle P^{3+1} \rangle$  [8, с. 24 – 31].

Отображение  $\tilde{E}_m \leftrightarrow \tilde{E}_m$  есть изоморфизм. В базисе  $\tilde{E}_m = \{\tilde{x}, \tilde{ct}\}$  координатная сетка имеет криволинейный характер, причём частично или полностью. Например, для гиперболического движения системы  $\tilde{E}_m$  в целом её собственную двумерную координатную сетку составляют декартовы прямолинейные оси  $x^{(m)}$  и гауссовые криволинейные оси – гиперболы  $ct$  с их общим центром в точке О (рис. 2А).

Ввиду гладкости функциональной связи между координатами в базисах  $\tilde{E}_m$  и  $\tilde{E}_m$  первые дифференциалы гауссовых криволинейных координат  $d\tilde{x}_k$  и  $d\tilde{ct}$  в  $\tilde{E}_m$  быть однородные линейные функции от первых дифференциалов  $dx_k^{(m)}$  и  $dct$  в  $\tilde{E}_m$ , или  $d\tilde{u} = V_{(i)}^{-1} du^{(m)}$ . Скалярный элемент дуги мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в какой-либо точке  $M'$  вычисляется через его квадратичную форму двояко – либо в  $\tilde{E}_m$ , либо в  $\tilde{E}_m$ :

$$dct^2 = du^{(m)'} \cdot I^\oplus \cdot du^{(m)} = d\tilde{u}' \cdot \{V_{(i)} \cdot I^\oplus \cdot V_{(i)}\} \cdot d\tilde{u} = d\tilde{u}' \cdot G_{(i)}^\oplus \cdot d\tilde{u}.$$

В обратном порядке матрица конгруэнтного преобразования  $V_{(i)}$  получается однозначно из метрического тензора путём его общего конгруэнтного представления:

$$G^\oplus = R' \cdot D^\oplus \cdot R = (\sqrt{D^\oplus} \cdot R)' \cdot I^\oplus \cdot (\sqrt{D^\oplus} \cdot R) = V' \cdot I^\oplus \cdot V.$$

Как видим, при переходе в ускоренные базисы исконная метрика базового пространства событий сохраняется. Применение гауссовых криволинейных координат даже в плоском пространстве-времени Минковского с целью анализа ускоренных движений со всей необходимостью ведёт к привлечению для его математического описания абсолютного тензорного исчисления Риччи. В мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$  гауссовые криволинейные координаты имеют аффинную связность, определяемую в них же через переменный тензор  $G_{(i)}^\oplus$  пространства-времени Минковского (или метрический тензор инерции). Последний действует как функция в каждой мировой точке  $M'$ . Существенно здесь то, что тензор кривизны Римана – Кристоффеля необходимо нулевой в силу того, что базовое пространство-время по сути плоское. Искривление координатной сетки в движущейся системе  $\tilde{E}_m$  происходит строго по отношению к наблюдателю  $N_m$ , находящемуся всегда в центре мгновенного базиса. С его смещением в собственном базисе указанное искривление координат смещается точно также. (В точке нахождения наблюдателя  $N_m$  тензор тот же –  $I^\oplus$ .) С точки зрения галилеевски инерциального наблюдателя  $N_j$  никакого искривления координат в мгновенной системе  $\tilde{E}_m$  вообще не происходит; здесь местоположение наблюдателя  $N_m$  не имеет никакого значения. Например, движущийся ускоренно вместе с  $N_m$  прямой стержень так и воспринимается наблюдателем  $N_j$  как прямолинейный. Но при

в этом неинерциальном наблюдателе  $N_m$  может воспринимать его опосредованно в  $\tilde{E}_m$  как искривлённый объект. Описанный релятивистский эффект имеет чисто координатную природу. Каких-либо дополнительных механических напряжений от кажущегося искривления стержня в  $\tilde{E}_m$  не возникает. Ведь одни и те же *собственные силы* в любых системах отсчёта, по-прежнему, определяются тождественно как абсолютные характеристики в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .

Симметричный метрический тензор  $G$  для представления квадратичной формы интервала как скалярного произведения первых дифференциалов определяется совершенно независимо через первые дифференциалы линейного элемента, выраженные в контравариантных и в ковариантных координатах:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= du_{con}' du_{cov} \equiv du_{cov}' du_{con} = du_{con}' \frac{du_{cov}}{du_{con}} du_{con} = du_{con}' G du_{con} \equiv \\ &\equiv du_{cov}' \frac{du_{con}}{du_{cov}} du_{cov} = du_{cov}' \hat{G} du_{cov}, \text{ где } \hat{G} = G^{-1}. \end{aligned}$$

В ускоренной системе отсчёта  $\tilde{E}_m$  действует искажённая псевдоевклидова геометрия Минковского с переменным метрическим тензором  $G_{(i)}^\oplus$  в криволинейных координатах и с нулевым повсюду тензором кривизны Римана – Кристоффеля. Роль тензорного аналога абсолютного векторного ускорения в системе  $\tilde{E}_m$  выполняют символы Кристоффеля.

В процессе создания ОТО (с 1913г.) Эйнштейн пришёл к выводу [49], что метрика реального пространства-времени в присутствии поля тяготения в произвольно движущейся системе отсчёта  $\tilde{E}$  задаётся тоже двухвалентным симметричным тензором  $G^\oplus$ , при этом тяготение и инерция как тензоры локально неразличимы между собой (*принцип эквивалентности*). Это содержало существенное расширение закона о тождестве инерционной и тяготеющей масс. По Эйнштейну метрический тензор пространства-времени и приведенный тензорный потенциал обобщённого  $G$ -поля суть простые аналоги. Отсюда в ОТО неизбежно вытекало искривление реального пространства-времени и его более сложный – *псевдориманов* характер. Это привело к её *натуральной геометризации*. Гравитация стала геометрическим понятием.

Слияние в одном и том же качестве активной и пассивной гравитации означало, прежде всего, признание инерции и ускорения такими же относительными понятиями как движение и скорость. В этом проявился *общий принцип относительности Эйнштейна*. Свободно движущиеся системы отсчёта в ОТО стали как бы равноправны между собой. Это вылилось маргинально в широко известное и весьма по научному честное утверждение Эйнштейна о равноправии систем Коперника

и Птолемея. А именно метрический тензор в них имеет локально стандартную форму  $I^{\oplus}$  в силу компенсации инерции и тяготения. Поэтому все физические законы сохраняют также стандартную форму.

Но, во-первых, здесь был явный отказ от *принципа Маха*, определившего инерцию абсолютно – в галилевски инерциальной системе отсчёта  $\tilde{E}_0$ . Во-вторых, здесь нарушался *принцип соответствия*, так как при отсутствии активного гравитационного воздействия невозможно сделать вывод: в какой же по характеру системе отсчёта оказывается движущаяся материальная точка – галилеевски инерциальной или неинерциальной, как об этом судят в СТО по символам Кристоффеля.

Сразу же заметим, что на более простой путь обобщения теории относительности с дополнительным учётом поля тяготения и силовых полей иного рода как *материальных явлений* указывал Пуанкаре ещё в 1905г. [39]. Во второй половине XX века интерес к чисто *полевой* (негеометрической) концепции гравитации возрождается вновь [53, 64]. Впервые (1976 г.) эта концепция довольно обстоятельно была изложена Боулером в его известной фундаментальной учебной монографии [8]. В ней он вовсе не стремится опровергнуть ОТО, но в предисловии осторожно замечает: “Поскольку физика – наука экспериментальная, не исключено, что в один прекрасный день чисто геометрический подход окажется неадекватным.” Боулер последовательно развивает обобщение закона тяготения Ньютона и уравнения Пуассона для гравитации с учётом тех поправок, которые вносит именно СТО. Аналогией этому для него послужило соответствующее обобщение закона Кулона и уравнения Пуассона для электростатики при построении классической релятивистской электродинамики, где источником поля является сохраняющийся вектор электромагнитного тока. Принципиальное отличие заключается лишь в том, что применительно к гравитации источником поля принимается сохраняющийся тензор энергии-импульса (материи и поля). В итоге Боулер рассматривает тяготение как *классическое поле*, соответствующее специальным частицам – гравitonам со спином 2 (точнее 2 или 0). В такой полевой *релятивистской теории гравитации* (РТГ) базовое пространство-время Минковского сохраняет полностью координатно-описательное значение, как в СТО. Но псевдодекартовы системы координат, будучи помещёнными в гравитационное поле, деформируются с точки зрения весьма удалённого галилеевски инерциального наблюдателя. В частности, с его точки зрения в гравитационном поле замедляется течение собственного времени.

С 80-х годов XX века появляются более решительные по изложению (а именно с полным отрицанием ОТО) публикации Логунова с рядом соавторов. Недавно они были подытожены в фундаментальной монографии Логунова [33]. В ней наряду с обстоятельным критическим

анализом ОТО (с неопределенным, *псевдоримановым* искривлением пространства-времени) дана концептуально аналогичная указанной, но значительно более развитая по построению РТГ. Тяготение четко отделено от инерции как совершенно иное и *материальное* понятие, определяемое именно в базовом пространстве-времени Минковского. Принцип эквивалентности не действует. Эта теория, вполне корректно обобщающая СТО в гравитационном поле, по сути – *релятивистская небесная механика* (если в терминологии строго следовать Лапласу).

Вернемся к теории в версии Эйнштейна. Вследствие натуральной геометризации ОТО возникла её логическая неувязка с исходной СТО. Почему активное гравитационное воздействие (тяготение) в ОТО должно обязательно искривлять метрическое пространство-время, а априори эквивалентное ему пассивное гравитационное воздействие (инерция) подобного искривления в СТО не вызывает? Ввиду такого явного несоответствия между СТО и ОТО Эйнштейн принял концепцию, что инерция может эквивалентным образом локально искривлять пространство-время, как тяготение, и поэтому они на дифференциальном уровне неразличимы между собой. Отсюда следовала как бы неприменимость СТО к описанию движений в ускоренных системах отсчета даже в отсутствие поля тяготения, что весьма странно!? Такая концепция, кстати, в полной мере отвечала позитивистской философии Маха и его склонности к римановой геометрии Вселенной. Поэтому, согласно Эйнштейну, СТО действует в ОТО только на инфинитиземальном уровне, а  $\langle P^{3+1} \rangle$  с преобразованиями Лоренца в нем всегда мгновенное и касательное в каждой мировой точке искривленного пространства-времени (подобно касательной к кривой, самой по себе). Следовательно, система Маха  $\tilde{E}_0$  каждый раз какая-то новая, не привязанная к чему-либо материальному, то есть надобность в ней в ОТО попросту отпадает.

В связи с той же антitezой отметим, что при дальнейшем развитии ОТО на основе принципа эквивалентности и натуральной геометризации прежде всего Гильбертом [17] в 1915–1917 гг. в результате анализа им же впервые полученных общерелятивистских уравнений движения было установлено противоречие новой теории фундаментальным *интегральным* законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения в замкнутой материальной системе. Эти законы сохранения в ОТО действуют только локально в касательном  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Гильберт отметил это как “характерную черту ОТО” (цитата). По существу такое отклонение с математической точки зрения вызвано отсутствием в ОТО десятипараметрической группы движений, свойственной плоскому пространству-времени Минковского, вследствие трансформации последнего в поле тяготения в искривленное

псевдориманово пространство-время [32, с.163]. Позже его знаменитая ученица Амали Эмми Нёттер (1918г.) сформулировала фундаментальную теорему математической физики, связывающую интегральные законы сохранения движения непосредственно с параметрами симметрии базового метрического пространства-времени. Ввиду того что псевдориманово пространство-время неоднородно и неизотропно, в нём эти законы не могут соблюдаться принципиально. Поэтому в ОТО нужно было либо отказаться от интегральных законов сохранения движения, либо найти какие-нибудь модифицированные аналоги вышеуказанным сохраняющимся величинам в искривлением гравитацией пространстве-времени. Первый путь обосновывал бы в ином – уже в космическом масштабе всё тот же *perpetuum mobile*. Второй путь неизбежно ведёт к дальнейшему чрезмерному усложнению самой теории тяготения.

В свою очередь, принцип эквивалентности, согласно Эйнштейну, постулирует неразличимость “поля инерции” и поля тяготения на локальном уровне как  $G^{\oplus} \equiv G_{(i)}^{\oplus} \equiv G_{(f)}^{\oplus}$  в силу их тождественной гравитационной природы. Но характер такого обобщённого  $G$ -поля в ОТО математически определяется значимостью тензора кривизны Римана – Кристоффеля [42, с. 9]. Нулевой тензор кривизны отвечает отсутствию именно поля тяготения. С другой стороны, ненулевой тензор кривизны отвечает наличию реального поля тяготения. В первом случае при *любых* проявлениях только сил инерции степень свободы функционального изменения метрического тензора как совокупности скалярных элементов значительно меньше, чем таковая во втором случае – при *любых* реальных проявлениях только сил тяготения. Рассмотрим это на дифференциально-геометрическом уровне.

\* \* \*

Риманово пространство, как известно [21], имеет инфинитиземально евклидову метрику. Но в силу его кривизны уже для вторых дифференциалов протяжённости в нём проявляются отклонения от евклидовой метрики, что функционально выражают символы Кристоффеля. Кроме того, римановы пространства в целом могут иметь значительно более разнообразные топологические формы, нежели евклидово пространство. Конкретное вещественное риманово пространство размерности  $m$  может быть вложено без изменения его внутренней геометрии и топологических свойств в некоторое евклидово надпространство  $\mathcal{E}^n$ . Причём минимальный порядок вложения  $n_{\min}$  априори находится в интервале от  $m$  до  $\infty$ .

Особо отметим то, что характеристика  $n_{\min}$  определяется в совокупности внутренней геометрией и топологией риманова  $m$ -пространства.

Например, двумерная псевдосфера Бельтрами (гл. 6А) есть риманово 2-пространство постоянной отрицательной кривизны, топологически эквивалентное цилиндру (без оснований). Она имеет значение  $n_{\min} = 3$ . С другой стороны, поверхность Лобачевского – Больяи есть риманово 2-пространство постоянной отрицательной кривизны, топологически эквивалентное аффинной плоскости. Она имеет  $n_{\min} > 3$ . Чтобы её вложить и описать в каком-то  $\langle E^n \rangle$  (обобщённая задача Бельтрами), значение  $n_{\min}$  должно быть не менее 4-х – см. гл. 12. Возможно, что с этой целью её нужно представить как закрученную двумерную поверхность с главными радиусами кривизны «+ R» и «– R» (псевдосферу с аффинной топологией). Задача Бельтрами обобщается аналогично и дальше при  $m > 2$ . Но она относилась только к евклидову надпространству.

В более подходящем тут псевдоевклидовом метрическом надпространстве  $\langle P^{m+1} \rangle$ ,  $m$ -поверхность Лобачевского – Больяи отображается в целом изометрично на верхнюю часть гиперболоида II Минковского при  $n_{\min} = m + 1$ . В этом же надпространстве изометрично в целом отображается  $m$ -псевдосфера Бельтрами на гиперболоид I Минковского (гл. 6А). В свою очередь, “ $m$ -гоффа” есть риманово пространство нулевой кривизны и топологически эквивалентное аффинному  $m$ -пространству. Она отображается изометрично в целом на  $\langle E^n \rangle$  или на  $\langle P^n \rangle$ , то есть при  $n_{\min} = m$ .

Но классическая *общая риманова геометрия* имеет чётко выраженный дифференциальный характер, определяемый изначально через метрический тензор  $G^\oplus$  или  $G^\otimes$  как матричную функцию точечного элемента (псевдо)риманова пространства. Это есть по изначальной своей сути внутренняя геометрия в малом. В таком ракурсе общая риманова геометрия существенно отличается от *однородных геометрий в целом*, в которых особое значение имеют понятия: “группы движений”, “свобода движения фигур”, “топологические свойства”. К таковым целостным и однородным геометрическим системам относятся, например, евклидова и псевдоевклидова геометрии, эллиптическая геометрия Римана, гиперболическая геометрия Лобачевского – Больяи, в том числе изоморфная ей геометрия гиперболоида II (гл. 12). Понятие “вложимость” по отношению к (псевдо)евклидову надпространству для (псевдо)риманова метрического пространства в целом с неопределенной топологией не имеет какого-либо смысла. Это, в частности, сказывается также на неопределенности для него значения  $n_{\min}$ . Но если ограничиться изучением только какой-либо топологически аффинно-эквивалентной *области* (псевдо)риманова  $m$ -пространства, то тогда значение  $n_{\min}$  будет всецело определяться его локальными дифференциально-геометрическими свойствами.

Двухвалентный симметричный тензор содержит в себе максимально  $k = m \cdot (m + 1)/2$  независимых друг от друга функциональных скалярных элементов  $g_{ij}$ . Поэтому рассматриваемая область риманова  $m$ -пространства всегда вложима в  $\langle E^k \rangle$  без изменения своей внутренней геометрии. Далее зададим аналитически внешним образом указанную область риманова  $m$ -пространства в  $\langle E^n \rangle$ , где  $n \geq m$ , в каком-либо декартовом базисе  $E_1$  через  $n \times 1$  радиус-вектор  $u$  соответственно с  $m$  степенями свободы движений-трансляций. Пусть каждой степени свободы этого радиус-вектора отвечает гауссова криволинейная координата  $\xi_i$  риманова  $m$ -пространства. Тогда имеется функциональное отображение  $u = u(\xi)$ .

В каждой точке указанной области риманова  $m$ -пространства существует непрерывно дифференцируемая в ней матрица Якоби  $d u / d \xi$ . Согласно Гауссу и Риману, внутренняя геометрия этой области определяется непрерывно функционально через внутреннюю гомомультипликацию – метрический тензор:

$$G^\oplus = \left( \frac{d u}{d \xi} \right)' \cdot \frac{d u}{d \xi} \quad (\det G^\oplus > 0),$$

$$\|du\|_E^2 = du' \cdot du = d\xi' \cdot G^\oplus \cdot d\xi.$$

В свою очередь, для псевдориманова  $m$ -пространства в  $\langle P^{n+q} \rangle$ , где  $n + q \geq m$ , имеется псевдоаналогия (гл. 4):

$$G^\oplus = \left( \frac{d u}{d \xi} \right)' \cdot I^\oplus \cdot \frac{d u}{d \xi} \quad (\text{причём при } q = 1 \quad \det G^\oplus < 0),$$

$$\|du\|_P^2 = du' \cdot I^\oplus \cdot du = d\xi' \cdot G^\oplus \cdot d\xi.$$

Для полной функциональной независимости  $k$  элементов симметричного тензора  $G^\oplus$  необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $n \geq k$ . При  $n < k$  риманово  $m$ -пространство частично уплощается, в том числе полностью при  $n = m$  в евклидово  $m$ -пространство. Наоборот, при  $n > k$  Theorema Egregium Гаусса всегда позволяет понизить порядок вложения ограниченной области риманова  $m$ -пространства, по крайней мере, до  $n_{\min} = k$ , используя операцию изгибания. Например, регулярный фрагмент любой кривой, самой по себе ( $m = 1$ ), изгибанием всегда можно трансформировать в отрезок евклидовой прямой ( $k = n_{\min} = 1$ ). Аналогично топологически аффинно-эквивалентную и регулярную область произвольной римановой поверхности ( $m = 2$ ) изгибанием всегда можно вложить в  $\langle E^3 \rangle$  без изменения её внутренней геометрии ( $k = n_{\min} = 3$ ). Это относится и к области поверхности Лобачевского – Больяни, но не к ней в целом, что было доказано впервые Гильбертом.

Метрический тензор инерции  $G_{(i)}^\oplus$  как функция точечного элемента псевдориманова пространства имеет  $n_{\min} = m = 4$  степени свободы для скалярных элементов  $g_{ij}$ . В минимальном плоском пространстве вложения  $\langle P^{3+1} \rangle$  в гауссовых криволинейных координатах он задаёт искажённую псевдоевклидову геометрию Минковского. (Отметим, что в обычных – псевдодекартовых координатах здесь же он попросту постоянен.) С другой стороны, метрический тензор  $G^\oplus$  псевдориманова четырёхмерного пространства  $\langle R^{3+1} \rangle$  имеет  $n_{\min} = k = 4 \cdot 5/2 = 10$  степеней свободы ( $> m = 4$ ) для скалярных элементов  $g_{ij}$ . В гауссовых криволинейных координатах он задаёт псевдориманову геометрию, например в минимальном метрическом пространстве вложения  $\langle P^{c+d} \rangle$ , где  $c + d = 10$ ,  $c \geq 3$ . В первом случае, для которого  $n_{\min} = m = 4$ , тензор кривизны Римана – Кристоффеля обязательно нулевой. Во втором случае, для которого  $n_{\min} = k = 10 > m$ , он никак не может быть нулевым из-за кривизны псевдориманова пространства, вложенного в  $\langle P^{c+d} \rangle$ . Никаким выбором локального базиса нельзя изменить риманову кривизну и нельзя ненулевой тензор кривизны сделать нулевым и наоборот. Поэтому, если принимается как базовый принцип Маха, то принцип эквивалентности в общем случае не реализуется. (При свободном движении материальной точки в поле тяготения *собственные векторные силы тяготения и инерции* полностью компенсируют друг друга, согласно третьему закону механики Ньютона и закону о тождестве инерционной и тяготеющей масс. Но поле тяготения и “поле инерции” даже локально в общем случае не компенсируют друг друга.) Отметим здесь то обстоятельство, что так называемое *эффективное псевдориманово пространство-время*, используемое в РТГ для упрощённого координатного описания движения материи в силу его аффинно-эквивалентной топологии имеет тот же минимальный порядок вложения  $n_{\min} = 10$ .

\* \* \*

Однако для простейших, *неискривлённых* форм поля тяготения и при этом весьма умозрительных (откуда, видимо, возникла идея принципа эквивалентности) нетрудно локально отождествить проявление активной гравитации (тяготения) и пассивной гравитации (инерции). Например, свободное *прямолинейное* физическое движение под действием стационарного однородного поля тяготения математически тождественно гиперболическому абсолютному движению в  $\langle P^{3+1} \rangle$  под действием постоянной *тангенциальной* собственной силы (рис. 3А). Свободное *круговое* физическое движение под действием стационарного сферически симметричного поля тяготения математически тождественно псевдовинтовому абсолютному движению в  $\langle P^{3+1} \rangle$  под действием постоянной *нормальной* собственной силы.

Проиллюстрируем сказанное на ранее рассмотренном примере замедления собственного времени равномерно ускоренного движения, отображённого на рис. 3А (гл. 5А). Применим дифференциальную форму гиперболического движения (92 А) как локально универсальную для любых ускоренных прямолинейных физических движений. С точки зрения относительно покоящегося инерциального наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$ , согласно СТО, имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{ch} \gamma &= d \frac{d\tau}{d\chi} = g_{(i)} d\chi/c^2 = F d\chi/(m_0 \cdot c^2) = dA/E_0, \\ \frac{d\tau}{d\chi} &= \frac{dt}{d\chi} = \operatorname{ch} \gamma = 1 + A/(m_0 \cdot c^2) = 1 + A/E_0. \end{aligned} \right\} \quad (209\text{A})$$

(См. также аналогичные более общие скалярные формулы (162А) и (171А), в том числе для *непрямолинейных* ускоренных физических движений.) То же самое замедление собственного времени  $\dot{\tau}$  с точки зрения неинерциального наблюдателя  $N_m$  *внутри* космического корабля можно трактовать по Эйнштейну локально так, как будто бы наблюдатель находится в эквивалентном стационарном поле тяготения с напряжённостью  $g_{(f)} \equiv g_{(i)}$ :

$$\left. \begin{aligned} d \frac{d\tau}{d\chi} &= g_{(f)} d\chi/c^2 = F d\chi/(m_0 \cdot c^2) = dE_{(f)}/E_0 = d(-P)/c^2, \\ \frac{d\tau}{d\chi} &= \frac{dt}{d\chi} = 1 + E_{(f)}/(m_0 \cdot c^2) = 1 + E_{(f)}/E_0 = 1 + (-P)/c^2 > 1. \end{aligned} \right\} \quad (210\text{A})$$

В РТГ поле тяготения определяется и действует именно в плоском  $\langle P^{3+1} \rangle$  как базовом пространстве-времени. Но при математическом описании в нём движения материи (в том числе света) поле тяготения как бы деформирует координатную сетку в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , изменяя его метрику [8, с. 89 – 105]. Например, формула (210А) в случае простейшего эквивалентного поля тяготения даёт соответствующее ему изменение масштаба времени. Если координаты остаются (полу)геодезическими, то деформированное  $\langle P^{3+1} \rangle$  преобразуется вместе с осями координат в искривлённое эффективное псевдориманово пространство-время [33, с. 32 – 36]. Понятно, что топология этих пространств по сути одна и та же – топология аффинного пространства. Формально устранив деформирующее воздействие поля тяготения на координаты, мы также устраним и это *кажущееся* искривление пространства-времени. В результате приходим к описанию движения в исконном  $\langle P^{3+1} \rangle$  под действием силы тяготения, как и любой иной собственной силы. В *относительной* трактовке такие движения рассматривались в гл. 7А. Все расчёты и оценки в сферически симметричном поле тяготения

значительно упрощаются, если при этом гравитационный потенциал  $P$  в порядке аппроксимации принимается *скалярной* характеристикой, как в вышеуказанном примере (210A). Пусть тот же скалярный потенциал отвечает именно относительно неподвижной в  $\tilde{E}_1$  некоторой астрономической массе  $M_0$ . Для реализации такого подхода примем два следующих условия.

1. Система отсчёта  $\tilde{E}_1$ , связанная с центром астрономической массы  $M_0$ , принадлежит множеству  $\langle \tilde{E}_j \rangle$  галилеевски инерциальных систем, задаваемых системой Маха  $\tilde{E}_0$ .
2. Движение материи в поле тяготения астрономической массы  $M_0$  описывается именно в  $\tilde{E}_1$  в базовом пространстве-времени Минковского.

Центр базиса  $\tilde{E}_1$  удобно расположить в центре астрономической массы  $M_0$ , где собственный гравитационный потенциал последней нулевой из-за отсутствия тяготения. (Последнее было доказано ещё в XVIII веке Кавендишем.) Например, система  $\tilde{E}_1$ , связанная с центром массы Солнца (система Коперника), с довольно высокой степенью точности может считаться галилеевски инерциальной системой отсчёта и принадлежать множеству  $\langle \tilde{E}_j \rangle$ .

В связи с этим покажем, что известные наблюдательные *общерелятивистские* эффекты, так или иначе вызываемые полем тяготения Солнца, объясняются *на элементарном уровне* на основе СТО и теории тяготения Ньютона. При этом в расчётах дополнительно учитывается формальным образом вышеуказанный эйнштейнов *эффект замедления собственного времени в поле тяготения*. Обсуждаемые здесь общерелятивистские эффекты рассматриваются с точки зрения удалённого наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$  как бы вне поля тяготения. Такая аппроксимация даёт первый порядок точности по гравитационной постоянной, что пока только и измеряется при реальных наблюдениях.

Из (210A) следует приближённая формула, выражющая влияние *скалярного* гравитационного потенциала на течение собственного времени:

$$\frac{d\dot{ct}}{d\dot{t}_2} = [1 + (-P_2)/c^2]/[1 + (-P_1)/c^2] \approx 1 + [(-P_2) - (-P_1)]/c^2. \quad (211A)$$

Из неё видно, что собственное время  $\dot{t}$  течёт медленнее в той точке, где отрицательный потенциал меньше. При  $P_1 = 0 = \max$  имеем, что  $\dot{t}_1 = t$  – координатное время в  $\tilde{E}_1$ . Подставив в (210A) значение ньютона гравитационного потенциала Солнца, получаем для околосолнечного пространства известную и довольно точную оценку:

$$d\dot{ct} = d\dot{ct}/(1 + fM_0/r \cdot c^2) \approx d\dot{ct} \cdot (1 - fM_0/r \cdot c^2). \quad (212A)$$

В ОТО и в РТГ имеется аналогичная *тензорная* оценка замедления собственного времени в поле тяготения через угловой скалярный элемент метрического тензора псевдориманова пространства-времени (реального и эффективного):

$$\frac{d\dot{ct}}{dct} = \sqrt{-g_{44}} \approx 1 - (-P)/c^2 < 1,$$

$$-g_{44} = 1 - (-2P)/c^2 + \dots < 1 \quad (\text{см. например [37, с. 212; 33, с. 88]}).$$

Простейшее и наглядное отображение *активной* гравитации таково, что поле тяготения в окрестности каждой мировой точки попросту деформирует координатную сетку в  $\langle P^{3+1} \rangle$  [8, с. 89 – 105]. Например, в стационарном поле тяготения координата  $\vec{ct}$  как бы растягивается. В свою очередь, локальные наклоны мировых линий по отношению к  $\vec{ct}$  как бы уменьшаются, в том числе и наклон изотропного конуса. Но геометрический и физический смысл последнего сохраняется. С учётом этого локальная скорость распространения света, как и других электромагнитных волн (частиц), в поле тяготения *с точки зрения удалённого наблюдателя*  $N_1$  как бы уменьшается следующим образом:

$$\dot{c}/c \approx 1 - (-P)/c^2 < 1. \quad (213A)$$

Другой известный и наблюдаемый на Земле общерелятивистский эффект – “красное смещение” спектра излучения Солнца объясняется по Эйнштейну замедлением частоты электромагнитных колебаний на поверхности Солнца, согласно её значительному отрицательному гравитационному потенциалу:

$$\frac{\dot{v}/v}{\dot{c}/c} = \frac{dc}{dt} \approx 1 - fM_0/r \cdot c^2. \quad (214A)$$

На величину отклонения, конечно, оказывает влияние эффект Допплера (гл. 7А). Более точная оценка, приближающаяся к вышеуказанной, получается для полюсов вращения Солнца. (Земным потенциалом здесь, конечно, пренебрегают как сравнительно небольшим.)

\* \* \*

В качестве заключительного примера рассмотрим в базисе  $\tilde{E}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  элементарную трактовку самого известного наблюдательного общерелятивистского эффекта – искривления светового луча в поле тяготения Солнца. Данное искривление максимально и обнаружимо при наблюдениях на Земле, когда световой луч от какой-либо звезды (с известными координатами на небосводе) проходит при полном

солнечном затмении вблизи солнечного диска. Оно определяется по отклонению траектории светового луча и соответственно угловой координаты звезды. О влиянии *аберрации* на наблюдение звёзд указано в гл. 7А. Свою лепту в искажение координат звезды (чем она ближе к нам) вносит *параллакс*. Но эти поправки малосущественны в сравнении с рассматриваемым гравитационным эффектом.

Для элементарной оценки данного эффекта можно принять, что земной наблюдатель  $N_1$  физически неподвижен в системе  $\tilde{E}_1$ , связанной с центром массы Солнца. Искривление светового луча при прохождении вблизи Солнца обусловлено гравитационным притяжением фотонов как световых материальных частиц с собственной массой  $m_L$  в  $\tilde{E}_1$ . Принципиальная особенность такого вида частиц, как известно, заключается в том, что они имеют нулевую массу покоя. Поэтому их собственная масса всегда определяется только в состоянии движения по изотропному конусу по формуле Планка – Эйнштейна. Здесь на изотропном конусе каким-то загадочным образом для массы фотона реализуется раскрытие неопределенности типа  $m_L = m_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma = 0 \cdot \infty$ .

Пусть материальная точка вообще массой  $m$  движется относительно астрономической массы  $M_0$  с мгновенной скоростью  $v$  под углом  $\varepsilon$  к радиус-вектору  $r$ , соединяющему центр массы  $M_0$  и точку  $m$ . Все эти характеристики выражаются в  $\tilde{E}_1$ , связанной с центром массы  $M_0$ . Собственная сила тяготения  $F$  массы  $m_0$  к массе  $M$  есть инвариант в любых галилеевских инерциальных системах отсчёта из множества  $\langle \tilde{E}_j \rangle$ , в том числе в  $\tilde{E}_1$  и в  $\tilde{E}_m$ . Если  $M_0 \gg m_0$ , то материальная точка  $m$  в каждый момент времени совершает локально псевдовинтовое движение в  $\langle P^{3+1} \rangle$  с абсолютным псевдоевклидовым радиусом  $R$ . Согласно законам тяготения Ньютона и динамики СТО, в  $\tilde{E}_m$  имеем:

$$F = F \cdot e_\beta = (f \cdot M \cdot m_0 / r^2) \cdot e_\beta = (m_0 \cdot c^2 / R) \cdot e_\beta = \frac{F}{\rho} \cdot e_\eta + \bar{\bar{F}} \cdot e_a. \quad (215A)$$

Здесь используется разложение собственной силы и внутреннего ускорения на две взаимно-ортогональные проекции – нормальную и тангенциальную (см. гл. 7А), а также формула (205А). В  $\tilde{E}_1$  имеем:

$$\frac{F}{\rho} = \sin \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m / r^2) = m_0 \cdot c^2 / R = m \cdot v^2 / \rho,$$

$$\bar{\bar{F}} = \cos \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m / r^2) = m_0 \cdot c^2 / \bar{R} = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Тангенциальная проекция вызывает ускорение движения материальной точки  $m$  вдоль вектора скорости  $v$ . Но для световой частицы (фотона) она только изменяет его массу  $m_L$  в процессе движения: либо увеличивает, либо уменьшает её в зависимости от направления этой проекции по отношению к вектору  $v$ . Понятно, что на искривление траектории светового луча эта проекция никак не влияет. Напротив,

нормальная проекция вызывает искривление траектории светового луча локального радиуса  $\rho$ . В связи с этим конкретно для фотонов формулы для указанных проекций силы тяготения приобретают вид:

$$\frac{F}{\rho} = \sin \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_L / r^2) = m_L \cdot c^2 / \rho = E_L / \rho \quad (\rho \approx R, \text{ так как } v \approx c),$$

$$\bar{\bar{F}} = \cos \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_L / r^2) = c \cdot \frac{dm_L}{dt} = \frac{dE_L}{dt},$$

где  $m_L = hv/c^2$  – масса фотона в состоянии движения.

В теории гравитационного искривления луча света [49, с. 194–195] как вспомогательный параметр применяется расстояние « $b$ » от центра массы  $M_0$  до точки пересечения его двух асимптот:  $b \approx r \cdot \sin \varepsilon$ . С учётом значения этого параметра оценка искривления луча света вычисляется в дифференциальной и интегральной формах в виде:

$$d\delta_I \approx dl/\rho = d(-r \cdot \cos \varepsilon)/\rho = b d(-ctg \varepsilon)/\rho = [f \cdot M_0 / (b \cdot c^2)] \cdot \sin \varepsilon d\varepsilon = [(-P)/c^2] d\varepsilon,$$

$$\delta_I \approx [f \cdot M_0 / (b \cdot c^2)] \cdot \int_0^\pi \sin \varepsilon d\varepsilon = 2f \cdot M_0 / (b \cdot c^2) = 2 \cdot (-P_{\max}) / c^2.$$

Именно такая первоначальная оценка была получена Эйнштейном в 1911г. [37, с. 202], а исторически впервые она была вычислена, как известно, Зольднером ещё в 1801г. [6, с. 7 – 34]. Фактически эта оценка следует из теории тяготения Ньютона. Впоследствии в 1915 г. в связи с разработкой ОТО Эйнштейн дал общерелятивистскую поправку к искривлению луча света в слабом сферически-симметричном стационарном поле тяготения. При этом теоретическое искривление луча оказалось в два раза больше [37, с. 204, 212, 236].

Оценку второго слагаемого для искривления светового луча осуществим, применяя аналогию с распространением света в оптической среде с переменным показателем преломления и соответственно с его переменной скоростью. Здесь мгновенный угол падения образуется вектором скорости света  $v$  и радиус-вектором  $r$ . До их ортогональности (в перигелии) этот угол равен  $\varepsilon$ , а затем он равен  $(\pi - \varepsilon)$ . В первой части траектории скорость света уменьшается, а во второй её части она увеличивается, согласно (212А) и (213А). По закону Снеллиуса это интерпретируется математически и физически как дополнительное искривление светового луча в сторону центра массы  $M_0$ :

$$\sin \varepsilon / \sin(\varepsilon - d\delta_{II}) = \dot{c}/(\dot{c} - d\dot{c}) \leftrightarrow \varepsilon < \pi/2,$$

$$d\delta_{II} = 0, \quad d\dot{c} = 0 \leftrightarrow \varepsilon = \pi/2,$$

$$\sin(\pi - \varepsilon) / \sin[(\pi - \varepsilon) + d\delta_{II}] = \dot{c}/(\dot{c} + d\dot{c}) \leftrightarrow \varepsilon > \pi/2;$$

$$\begin{aligned} d\delta_{II} &= \operatorname{tg} \varepsilon d(\mp \dot{c})/\dot{c} \approx \operatorname{tg} \varepsilon d(\mp \dot{c})/c \approx \\ &\approx \operatorname{tg} \varepsilon d(f \cdot M_0 \cdot \sin \varepsilon) / (b \cdot c^2) = [(f \cdot M_0) / (b \cdot c^2)] \cdot \sin \varepsilon d\varepsilon = [(-P) / c^2] d\varepsilon = d\delta_I. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\delta = \delta_I + \delta_{II} = 4f \cdot M_0 / (b \cdot c^2) = 4 \cdot (-P_{max}) / c^2$  – значение, впервые через *абсолютное тензорное исчисление* теоретически предсказанное Эйнштейном в 1916 г. и до сих пор принятное как лучшая оценка данного эффекта. Теми же *элементарными средствами* и на основе оригинального подхода Боулера объясняется известная небольшая общерелятивистская поправка Эйнштейна к смещению перигелия Меркурия [8, с. 106–121].

\* \* \*

Как установил Фок, предсказания ОТО для общерелятивистских эффектов в Солнечной системе, строго говоря, неоднозначны [46]. А именно они зависят от задаваемых координатных условий. При изменении начального базиса эти эффекты изменяются нековариантно. Эйнштейн для однозначности такого рода оценок весьма искусственно рассматривал эти эффекты в слабом стационарном поле тяготения, фактически как бы вложенном в пространство-время Минковского [33, с. 156–165]. В РТГ и в упрощённом скалярном варианте, изложенном выше, это делается вполне естественным и однозначным образом.

Как видно из приведённых выше аргументов, основная версия ОТО о математически произвольном – псевдоримановом искривлении метрического пространства-времени в некотором G-поле, объединяющем инерцию и тяготение на основе принципа эквивалентности, является весьма спорной и противоречивой. Дальнейшее развитие теории относительности и её приложений в космологии показало, что эта версия без существенной на то необходимости значительно усложнила теоретическую картину мироздания, придав ей к тому же неопределённость в выводах и предсказаниях.

С учётом этих обстоятельств с середины XX века оживился интерес к концептуально иным принципам построения релятивистской небесной механики [см. например 53, 64, 9]. Выходят в свет фундаментальные публикации [8, 33], в которых развивается *релятивистская теория гравитации* (РТГ) в базовом пространстве-времени Минковского. В этой общей теории источником поля тяготения является сохраняющийся тензор энергии-импульса материи (включая и само материальное поле). Формально в РТГ в связи с искажающим влиянием поля тяготения на метрику для математического описания движения применяется *эффективное псевдориманово пространство-время* с той же аффинно-эквивалентной топологией (при сохранении геодезических координат).

Как же последнее можно трактовать реально *физически*? Ведь именно благодаря такому искажению в РТГ объясняются общерелятивистские эффекты, выходящие как бы за рамки СТО. Для этого, на наш взгляд, наиболее рационально вначале обратиться к остающемуся незыблемым и в общей теории закону сохранения энергии. Тогда простым логическим путём приходим к выводу, что обсуждаемые общерелятивистские эффекты в Солнечной системе имеют чисто координатно-описательную природу, но теоретически – с точки зрения галилевски инерциального наблюдателя, находящегося как бы *вне поля тяготения*.

Оценим, например, эффект “красного смещения” спектра излучения Солнца в его собственном поле тяготения с фундаментальной позиции закона сохранения энергии Гельмгольца в его квантово-механической трактовке (см. например [9, с. 116]):

$$hv + E_{(f)} = hv - (-P) \cdot m_L = h\dot{v} < hv, \quad (216A)$$

где  $m_L = hv/c^2$  – масса фотона в движении по формуле Планка – Эйнштейна. Откуда далее имеем:

$$hv \cdot [1 - (-P)/c^2] = h\dot{v}, \text{ или } v \cdot [1 - (-P)/c^2] = \dot{v}.$$

Конечный результат такой же, какой даёт вышеизложенный упрощённый скалярный подход, но физическая картина явления вырисовывается совершенно иная. В такой непосредственной трактовке эффекта излучение на поверхности Солнца, то есть в сильном поле тяготения, имеет *исходную* частоту (как например на Земле или вообще вне поля тяготения). Но затем эта частота уменьшается по мере удаления фотонов от Солнца за счёт преодоления его отрицательного гравитационного потенциала. Если допустить, что наблюдатель и источник фиксируемого излучения в данном случае меняются местами, то, согласно принципу относительности, наблюдатель теоретически зафиксирует наоборот – “синее смещение” спектра излучения источника на Земле. Это вовсе не означало бы какой-то локальный эффект ускорения времени на Земле. Аналогичную трактовку допускает исходная формула (209А), если для неё также принять замедление собственного времени материальной точки (в СТО) как *прямое следствие относительного уменьшения её “энергетического потенциала” в состоянии относительного покоя* (с точки зрения опять-таки инерциального наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$ ).

Следовательно, сильное гравитационное поле Солнца, сквозь которое происходит восприятие общерелятивистских эффектов даже земным наблюдателем, находящимся в сравнительно слабом поле, можно физически уподобить некоторой *гравитационной линзе*. Вообще же оно может либо ускорять, либо замедлять фиксируемые события и, конечно, искажать пространственные координаты в зависимости от

разности гравитационных потенциалов в мировых точках наблюдателя и фиксируемого события. (В специальной научной литературе понятие “гравитационная линза” стало использоваться довольно широко [6].) Реальное движение материи, совершающееся в гравитационном поле в  $\langle P^{3+1} \rangle$  по законам кинематики и динамики СТО под действием силы тяготения Ньютона, воспринимается наблюдателем  $N_1$ , вне этого поля сквозь вышеуказанную гравитационную линзу с общерелятивистским искажением, но без изменения топологии пространства-времени. В поле тяготения *по месту события* общерелятивистского искажения псевдодекартовых координат не происходит. Поэтому локальное математическое описание движения, реставрированное от искажающего влияния поля тяготения, не должно выходить за рамки СТО (гл. 10А).

*Такая интерпретация отличается от принятой трактовки тем, что локальное замедление собственного времени в поле тяготения заменяется на его внешне воспринимаемое относительное замедление. Сам по себе гравитационный потенциал никак не влияет ни на течение локального собственного времени, ни на какие-либо процессы; на них влияет именно различие потенциалов в точках события и его наблюдения.* (Ситуация аналогична имеющейся в СТО, поэтому и здесь возможен “парадокс близнецов”, но в гравитационном варианте.)

В теории искривления светового луча в поле тяготения Солнца составляющая  $\delta_I$  является фактической. Напротив, составляющая  $\delta_{II}$  является относительной. На самом деле локально никакого дополнительного искривления светового луча в поле тяготения в  $\langle P^{3+1} \rangle$  нет. Но его фиксирует координатно земной наблюдатель  $N_1$ , находясь в ослабленном поле тяготения, сквозь гравитационную линзу. (Например, если смотреть на траекторию прямого луча света от обычного прожектора в атмосфере сквозь какую-нибудь оптическую линзу, то мы зафиксируем её координатное искривление, чего на самом деле реально нет.)

Аналогично эйнштейново снижение скорости света в поле тяготения, согласно (213А), есть подобный относительный феномен, производный от наблюдаемого вне поля тяготения уменьшения частоты колебаний световых волн. Пропорционально этому как бы уменьшается по отношению к оси  $\vec{ct}^{(1)}$  наклон изотропного конуса и наклоны мировых линий движения материи, проходящих через одну и ту же мировую точку пространства-времени  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Все материальные процессы в её окрестности замедляются также *кажущимся* образом (как, например, происходит лоренцево сокращение). С квантово-механической точки зрения пропорционально этому замедляется частота колебаний волн Де Броиля, связанных с движущейся материальной точкой:

$$\dot{v} = \dot{c}/\lambda = (\dot{c}/c) \cdot v.$$

В вышеизложенном подходе СТО, гравитация и квантовая механика по *энергетическому* (более универсальному) влиянию на течение времени и частоту колебаний удивительным образом согласуются между собой.

С другой стороны, свет распространяется в космическом вакууме независимо от потенциала поля тяготения с одной и той же локальной координатной скоростью «с», равной масштабному коэффициенту Пуанкаре (гл. 1А). Разумеется, она как *константа* выражается здесь в каком-либо псевдодекартовом (галилеевски инерциальном) базисе. Именно это обуславливает в РТГ псевдоевклидову метрику базового пространства-времени в поле тяготения. Принципиально невозможно по измеренному каким-либо образом значению локальной координатной скорости света в конкретной мировой точке выявить в ней абсолютный гравитационный потенциал, равно как и не обнаружимо в ней же абсолютное физическое движение. (Это и есть по существу *общий принцип относительности* в РТГ.) В свою очередь, эйнштейнова эффективная скорость света фиксируется сторонним наблюдателем  $N_1$ , находящимся как бы вне поля тяготения или в слабом поле.

В РТГ в отличие от ОТО имеется *принципиальная* возможность устраниТЬ общерелятивистскую деформацию координат, или вышеуказанное эффективное искривление пространства-времени, пусть даже кажущееся [8, с. 89–105; 33, с. 57]. Тем самым реставрируются исконные релятивистские законы движения материи в базовом пространстве-времени Минковского, но теперь *ещё* и в поле тяготения.

РТГ и ОТО дают, как правило, тождественные оценки общерелятивистских эффектов со степенью точности первого порядка малости по гравитационной постоянной. Следовательно, обоснование новой концепции лежит глубже, а именно в соблюдении ею базовых научно-философских принципов. К одному из них следует отнести *принцип максимально возможной простоты и наглядности в теоретических построениях*, или *удобства* в смысле Пуанкаре. Говоря, что “выбор геометрии есть вопрос соглашения” (цитата), Пуанкаре, конечно, имел в виду соображения простоты интерпретации геометрии реального Мира, но только в пределах наблюдаемой части Вселенной – Мегагалактики. Всё далее неё остаётся *практически непознаваемым* и относится, по меткому выражению известного математика Бриллюэна, к области научной фантастики [9].

Первый великий опыт Гаусса (как руководителя астрономической обсерватории в Гётtingене) со своими учениками по измерению в земных условиях суммы углов макротреугольника и все последующие такого рода наблюдения, строго говоря, могли относиться только к экспериментальному познанию геометрии реального Мира в малом. Каких-либо достаточно серьёзных доказательств искривления базового

пространства-времени со стороны именно практической астрономии и астрофизики представлено так и не было. До сих пор при составлении звёздных и галактических карт окружающей Вселенной астрономы используют обычное евклидово пространство, или трёхмерный срез базового пространства-времени Минковского. Евклидово пространство применяется при расчётах траекторий небесных объектов и космических аппаратов в Солнечной системе. Однако при наблюдении этих объектов *во времени* как релятивистские, так и общерелятивистские эффекты в случае их значимости, конечно, должны учитываться. Все известные общерелятивистские и космологические эффекты нашли убедительное объяснение в рамках той же РТГ [8, 33]. Окончательную точку в научном споре между сторонниками ОТО и РТГ можно будет поставить *апостериори*, например, по результатам эксперимента с поведением гироскопа на космической орбите при его свободном движении в поле тяготения. Согласно ОТО, гироскоп сохраняет ориентацию по закону параллельного переноса вектора в псевдоримановом пространстве-времени и в такой системе не прецессирует. Согласно РТГ, гироскоп в галилеевски неинерциальной системе должен прецессировать относительно звёздной системы Вселенной (системы Маха) [33, с. 186 – 188]. В свою очередь, классическая гиперболическая неевклидова геометрия Лобачевского – Больши заняла своё достойное место в релятивистской кинематике и динамике, а также в ряде других областей физики.

Однако здесь нужно особо отметить, что в попытках применения релятивистской небесной механики в космологии необходимо, конечно, учитывать то обстоятельство, что « $c$ », « $f$ » и « $h$ » (см. выше) чисто *гипотетически* принятые константами во Вселенной. По крайней мере, это можно только предполагать (и то с необходимым обоснованием) в масштабах поддающейся практическим наблюдениям Мегагалактики. Абсолютно надёжными константами являются только сакраментальные математические числа « $\pi$ », « $\omega$ », « $e$ ». К настоящему времени имеется множество общерелятивистских теорий, базирующихся в конечном итоге на концепции или искривлённого, или плоского пространства-времени. Как правило, такие теории вносят какие-либо уточнения или дополнения соответственно либо в ОТО, либо в РТГ. В этих теориях общерелятивистские эффекты в Солнечной системе в первом порядке приближения по гравитационной постоянной имеют те же или несколько уточнённые значения. (Одним из наиболее известных примеров является тензорно-скалярная теория Дикке [19], которая применима, в принципе, как в варианте ОТО, так и в варианте РТГ.) Это лишний раз говорит о том, что теоретическое обоснование данных эффектов, само по себе, никак не может сводиться к экспериментальному доказательству ОТО, РТГ или какой-либо иной общей теории (в том числе и квантовой).

Основная концепция ОТО, выдвинутая в 1916 г. Эйнштейном, сводится к постулату, что все физические законы в любых свободно движущихся системах отсчёта имеют в локальной области одну и ту же форму, причём такую, которая отвечает метрическому тензору  $I^\oplus$ . Главное достоинство ОТО заключается, как известно, в том, что в ней нет необходимости вводить каким-либо образом галилеевски инерциальные системы отсчёта. Однако указанный постулат был и остаётся чистой гипотезой до тех пор, пока не получит убедительного экспериментального подтверждения. (Подобное осторожное замечание есть у Паули в его классической монографии по теории относительности [37, с. 219].) Противоречия, к которым приводит его последовательное применение в рамках ОТО в виде принципа эквивалентности, обсуждались выше.

Основная концепция РТГ по диалектической спирали Гегеля восходит к исторически изначальным идеям великих мыслителей прошлого: Канта – с постулатом об априорности евклидова пространства в реально окружающем нас мире и Ньютона – с постулатом об абсолютных пространстве и времени. Последние, но уже совместно, реализуются как единое базовое пространство-время Минковского логически безупречным образом. Оно обобщило также и понятие евклидова пространства. Главным достоинством РТГ является однозначность в координатном описании движения материи, в выводах и предсказаниях. В РТГ всегда возможно, хотя бы сугубо теоретически, осуществлять однозначную непрерывную трансляцию геодезических криволинейных координат мировых точек в *наблюдательном* эффективном псевдоримановом пространстве-времени в их координаты в каком-нибудь псевдодекартовом базисе (например универсальном) пространства-времени Минковского. При этом значение скалярного произведения и интервала в псевдодекартовых координатах будет гравитационно неискажённым, или истинным:  $dct^2 = \mathbf{u}^\top I^\oplus \cdot \mathbf{u}$ . В результате мы приходим к неискажённому описанию *реального* абсолютного и относительного движения материи в базовом пространстве-времени Минковского.

Здесь же, в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , определяются гравитационно неискажённые абсолютные инварианты любого ускоренного движения, например: внутреннее ускорение  $\mathbf{g}_{(i)}$ ; начальные значения массы  $m_0$ , импульса  $m_0\mathbf{c}$ , энергии  $m_0c^2$ . Прямолинейное *абсолютное движение* материальной точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$  проецируется гиперболически ортогонально на какое-либо собственное  $\langle E^3 \rangle^{(j)}$  как равномерное прямолинейное *физическое движение*. При отклонении абсолютного движения от прямолинейности обязательно возникает инерция (согласно принципу Маха), которая всегда противодействует какой-то активной собственной силе, в том числе реальной силе тяготения. В частности, при *свободном движении* материальной точки собственные силы инерции и тяготения

(в силу равенства инерционной и тяготеющей масс) всегда уравновешивают друг друга и поэтому они в таком случае никоим образом не фиксируются. Остаётся незыблемым закон сохранения энергии.

Отметим особо, что здесь не утверждается псевдоевклидовость базового пространства-времени *целом*. Полное знание о его глобальном устройстве, по нашему мнению, принципиально не достижимо. В точной математике конец иллюзиям о возможности заключенного знания, как хорошо известно, положила знаменитая теорема Гёделя о неполноте [56]. В физической науке, по отношению к бесконечной Природе и её устройству, аналогичное ещё далеко не осознано.

Все мыслимые движения материальных точек в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в принятой здесь трактовке подразделяются на абсолютные (геометрические) – с абсолютными параметрами и относительные (физические) – с относительными параметрами. Абсолютное движение материальной точки математически отображает мировая линия как кривая, сама по себе, в  $\langle P^{3+1} \rangle$  с допустимыми её наклонами внутри изотропного конуса (в реставрированных псевдодекартовых координатах  $\{x, ct\}$ ). У мировой линии есть одна существенная физическая особенность – её динамический характер. Это позволяет определить вдоль неё ряд абсолютных физических характеристик. В свою очередь, относительное физическое движение есть гиперболическая ортопроекция абсолютного движения на какое-либо  $\langle E^3 \rangle^{(j)}$ .

Отвечая на изначальный вопрос данной главы, скажем следующее. Релятивизация небесной механики вполне корректно и адекватно имеющимся данным наблюдений и экспериментов осуществима в базовом плоском пространстве-времени Минковского, где, в принципе, в псевдодекартовых координатах описывается локально абсолютное и как реальное отображение последнего – относительное движение материи в поле тяготения и в полях иной материальной природы без гравитационного или иного кажущегося искажения (искривления).

Примем данную общерелятивистскую концепцию, отвечающую РТГ, как рабочую гипотезу. Далее представляет интерес завершить исследование рассмотрением природы абсолютного движения материи и внутренней геометрии мировых линий как времениподобных кривых, самих по себе, но с учётом известной размерности объемлющего их плоского пространства  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Это даёт возможность с привлечением средств тензорной тригонометрии развить в нём псевдоаналог классической теории Френе – Серре для мировых линий, увязав его к тому же с их динамическим характером.

Завершим данную дискуссионную главу философским изречением Томаса Манна: “Великая истина – это такая истина, отрицание которой есть тоже великая истина!”

## Глава 10А. Природа движения по мировым линиям в пространстве-времени Минковского и его внутренняя геометрия

Любая материальная точка, в том числе центр массы любого материального объекта, находится в состоянии *перманентного абсолютного движения*. Его траектория, согласно Минковскому [36], геометрически интерпретируется в виде непрерывной, регулярной мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . По физической сути это есть интегральная стрела собственного времени материальной точки  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(ct) = ct$ . По математической сути это есть кривая, сама по себе, но вложенная в четырёхмерное плоское пространство-время и с наклоном всегда внутри мгновенного изотропного конуса.

В окрестности каждой своей мировой точки  $M$  мировая линия (траектория) полностью характеризуется *четырьмя абсолютными векторными дифференциально-геометрическими параметрами* – по числу измерений пространства событий  $\langle P^{3+1} \rangle$ . (Предпосылкой для такой картины является абсолютная теория кривых Френе – Серре [27, с. 522].) Они задают её ориентацию и конфигурацию в окрестности точки  $M$ . Ориентация этих векторных параметров определяется через координаты в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . Их модульные характеристики суть инварианты преобразований Лоренца в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Ориентация мировой линии в точке  $M$  вычисляется в координатах  $\tilde{E}_1$  через скалярный угол движения  $\gamma$  и его направляющие косинусы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(ct) &= \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ct \end{vmatrix}^{(1)} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}(ct) \\ ct(ct) \end{vmatrix}^{(1)}, \\ \mathbf{th} \gamma &= \frac{d\mathbf{x}}{dct} = \mathbf{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_a; \\ \gamma &= \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{dct} = \operatorname{Arth} \frac{\|d\mathbf{x}\|}{dct}, \\ \cos \alpha_k &= \frac{dx_k}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}, \quad \mathbf{e}_a = \{\cos \alpha_k\}. \end{aligned} \right\} \quad (217A)$$

В частности, для равномерного и прямолинейного физического движения имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \text{const}, \\ \mathbf{e}_\alpha = \text{const} \end{array} \right\} \leftrightarrow \gamma = \text{const}.$$

Для *простого* прямолинейного физического движения (гл. 5А) в  $\tilde{E}_1$  имеем:  $\mathbf{e}_\alpha = \text{const}$ , для *простого* равномерного физического движения в  $\tilde{E}_1$  имеем:  $\gamma = \text{const}$ .

Мгновенный собственный псевдодекартов базис  $\tilde{E}_m$ , определяемый касательной гиперболой в точке  $M$  мировой линии, задаётся через ротацию (74А). Причём центр базиса  $\tilde{E}_m$  всегда тождествен центру этой гиперболы. Матрица преобразования roth  $\Gamma^{(m)} = F_1(\gamma, \mathbf{e}_\alpha)$  определяется в  $\tilde{E}_1$  канонической структурой (363).

Псевдоевклидова интегральная длина дуги мировой линии  $\hat{l} = ct$ , отмеряемая от какой-либо условно начальной точки  $O$ , есть её внутренний параметр-аргумент. Для количественной характеристики абсолютного движения материальной точки вдоль мировой линии в теории относительности применяется так называемая 4-скорость (4-вектор) или *псевдоскорость* (скаляр), впервые введённая Пуанкаре:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c}(ct) = \frac{d\mathbf{u}}{dct} \cdot c = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d\tilde{c}\tau}{d\tau} = c \cdot \mathbf{i}(ct), \\ \mathbf{c}'(ct) \cdot I^\oplus \cdot \mathbf{c}(ct) = \| \mathbf{c}(ct) \|_p^2 = -c^2 = \text{const.} \end{array} \right\} \quad (218A)$$

Здесь «*c*» по математической сути есть постоянный нормирующий масштабный множитель Пуанкаре, придающий изотропность и метрические свойства пространству-времени (гл. 1А). По физической сути это есть координатная скорость света в межзвёздном вакууме. В свою очередь,  $d\mathbf{u} = d\tilde{c}\tau$  – мгновенная дифференциальная стрела собственного времени;  $\mathbf{i}(ct)$  – текущая единичная касательная к мировой линии, определяющая геометрически её ориентацию в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Итак,  $\mathbf{i}(ct)$  есть первый из дифференциально-геометрических параметров мировой линии, а именно её параметр *первого порядка* по дифференциальному длины дуги. По метрике он времениподобен, так как

$$\mathbf{i}'(ct) \cdot I^\oplus \cdot \mathbf{i}(ct) = -1.$$

Гиперболическая ортопроекция вектора  $\mathbf{c}(ct)$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  на  $\langle \mathcal{E}^{3,(t)} \rangle$  есть относительная, или физическая скорость материальной точки там же. Физическая скорость  $v$  как 3-вектор изменяется тогда и только тогда, когда изменяется ориентация мировой линии, то есть векторов  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{i}$ . Это происходит всегда и только при воздействии на материальную точку какой-либо собственной силы или равнодействующей нескольких

собственных сил. В частности, эта сила или одна из этих сил может быть вызвана воздействием на неё поля тяготения гравитирующих масс. Модуль псевдоскорости абсолютного движения любых материальных объектов есть константа «с» (что для электрона, что для звезды и т. д.).

Вышесказанное позволяет сформулировать следующий постулат.  
*Все материальные объекты перманентно движутся в абсолютном пространстве-времени Минковского, в том числе в поле тяготения, по собственным мировым линиям с постоянной в нём локальной координатной скалярной псевдоскоростью «с».*

Такая трактовка абсолютного движения реализуется именно при его трансляции в любой псевдодекартов, или галилеевски инерциальный базис (гл. 9А). Заметим, что в данном утверждении константа «с» и коэффициент однородности Пуанкаре совпадают. Особо отметим то, что «с» принимается константой лишь на основе данных земных наблюдений. Поэтому любые подобные утверждения, строго говоря, не могут распространяться на Вселенную в целом.

Данный постулат, *во-первых*, позволяет рассматривать мировые линии как абсолютные динамические времениподобные траектории в плоском метрическом пространстве событий и определить вдоль них дополнительные кинематические характеристики абсолютного движения материи – более высоких порядков, нежели «с». *Во-вторых*, он весьма просто и естественно объясняет природу перманентного движения материи по мировым линиям как течение собственного времени  $\tau$  и обратно. Следовательно, собственное время  $\tau$  течёт с той же абсолютной и постоянной скалярной псевдоскоростью «с»; при этом меняется только направление стрелы собственного времени, а именно – при любом преодолении силы инерции материи. Отсюда же измеряемые в  $\tilde{E}_1$  полный импульс и полная энергия движения материи составляют  $P = mc$  и  $E = mc^2$ . *В-третьих*, он с учётом формулы (205А) объясняет математически и физически причину гиперболического характера искривления мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  при физическом движении с ускорением или с замедлением.

Причиной именно гиперболического искривления мировых линий при отклонении от прямолинейной траектории является то, что вектор внутреннего ускорения  $\mathbf{g}(\tau) = \frac{d\mathbf{c}(\tau)}{d\tau}$ , как и вызывающая его собственная сила, всегда направлены гиперболически ортогонально  $\mathbf{c}(\tau)$ . Ввиду постоянства модуля вектора псевдоскорости его дифференцирование вдоль мировой линии даёт гиперболически ортогональный ему вектор-производную:

$$\mathbf{c}'(\tau) \cdot \mathbf{l}^\oplus \cdot \mathbf{c}(\tau) = \text{const} \rightarrow \mathbf{c}'(\tau) \cdot \mathbf{l}^\oplus \cdot \frac{d\mathbf{c}(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (219A)$$

Здесь используется обнуление скалярного произведения вектора  $\mathbf{c}(\tau)$  только с первым его векторным дифференциалом, хотя аналогичное имеет место и для его дифференциалов более высоких порядков. Математически гиперболическое искривление мировой линии выражает её мгновенная *абсолютная гиперболическая кривизна*:

$$K^{(m)} = 1/R_K^{(m)} = g(\tau)/c^2 = K(ct). \quad (220A)$$

Тут имеется некая псевдоаналогия с физическим движением по окружности. Как 4-векторы эти абсолютные пространствуподобные параметры движения *второго порядка по дифференциалу длины дуги* направлены по псевдонаормали:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{k}(ct) = K(ct) \cdot \mathbf{p}(ct), \\ \mathbf{r}_K(ct) = R_K(ct) \cdot \mathbf{p}(ct), \\ \mathbf{g}(ct) = g(ct) \cdot \mathbf{p}(ct). \end{array} \right\} \quad (221A)$$

При естественном – не скачкообразном изменении скорости физического движения мировые линии суть регулярные непрерывные кривые в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Они всегда времениподобны, то есть имеют ограничение по углу наклона к оси  $ct^{(1)}$ :  $\Phi_R(\gamma) < \pi/4$ .

Их *объемлющую размерность* характеризует *порядок линейного вложения*  $\lambda$ . Это, по определению, есть минимальная размерность объемлющего данную кривую плоского подпространства в базовом метрическом пространстве событий или в данном случае – плоского подпространства-времени. Для кривой в  $\langle P^{3+1} \rangle$  порядок  $\lambda$  находится в пределах от 1 до 4-х. Прямой линии соответствует  $\lambda = 1$ ; плоской кривой отвечает  $\lambda = 2$ , например для гиперболического движения, и т. д.

Из теории регулярных кривых в плоском метрическом пространстве [27, с. 521 – 524] следует, в частности, что для произвольной точки  $M$  на криволинейном участке мировой траектории при  $\lambda > 2$  однозначно определяется мгновенная абсолютная соприкасающаяся псевдоплоскость кривизны:

$$\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(ct), \mathbf{i}(ct) \rangle.$$

В универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  мгновенный единичный времени-подобный вектор касательной  $\mathbf{i}(ct)$ , см. формулу (218А), выражается тригонометрическим образом в результате 1-го дифференцирования:

$$\mathbf{i}(ct) = \frac{d\mathbf{u}(ct)}{dct} = \begin{bmatrix} \mathbf{sh} \gamma_i \\ \mathbf{ch} \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{sh} \gamma_i \cdot \mathbf{e}_a \\ \mathbf{ch} \gamma_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_a = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{vmatrix}. \quad (222A)$$

Вектор  $\dot{\mathbf{i}}(\tau)$  есть орт мгновенной стрелы собственного времени  $\overset{\rightarrow}{\mathbf{ct}}$ , или четвёртый вектор-столбец мгновенной модальной матрицы  $\text{goth } \Gamma$ . В свою очередь, характеристики  $\mathbf{p}(\tau)$  и  $K(\tau)$  вычисляются в результате 2-го дифференцирования вдоль мировой линии после (222А):

$$\frac{d\mathbf{i}(\tau)}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{u}(\tau)}{d\tau^2} = K(\tau) \cdot \mathbf{p}(\tau) = \mathbf{k}(\tau) = K(\tau) \cdot \boxed{\frac{\operatorname{ch} \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\beta}{\operatorname{sh} \gamma_p}}, \quad (223A)$$

$$\frac{\|d\mathbf{i}\|_P}{d\tau} = K \geq 0.$$

Абсолютные 4-векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$  приложены в точке М и направлены всегда от центра касательной гиперболы в соприкасающейся псевдо-плоскости  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  в сторону вогнутости мировой линии. Ввиду того что скалярные характеристики  $K$ ,  $R$  и  $g$  суть модули пространств-подобных векторов, то все они – положительные величины. Факт равномерности криволинейного физического движения определяется также абсолютно ( $\cos \varepsilon = 0$ ) в любом псевдодекартовом базисе, в том числе в  $\tilde{E}_1$ , через скалярное произведение:

$$\mathbf{e}_\beta' \cdot \mathbf{e}_a = (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_a + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta)' \cdot \mathbf{e}_a = \cos \varepsilon. \quad (224A)$$

Здесь единичный 3-вектор приращения движения  $\mathbf{e}_\beta$  выражен, согласно (136А); величина угла  $\varepsilon$  между  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_a$  может заключаться в пределах  $0 \div \pi$ .

Производная (223А) выражается функционально как псевдоаналог первой формулы Френе – Серре [27, с. 522], поскольку используемый в ней дифференциал дуги имеет псевдоевклидову метрику. Абсолютный 4-вектор  $\dot{\mathbf{i}}(\tau)$  при движении материальной точки М вдоль своей мировой линии вращается в её окрестности в пределах соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  с абсолютной мгновенной гиперболической угловой псевдоскоростью

$$\pm \eta_K^{(m)} = \frac{\|\hat{d\gamma}\|}{d\tau} = \frac{\|\dot{\mathbf{i}}\|_P}{d\tau} = c/R_K^{(m)} = c \cdot K^{(m)} = g^{(m)}/c, \quad (225A)$$

где знаки «+» и «-» выбираются для ускоренного и замедленного движений (соответственно кривая выпукла или вогнута). Обратим внимание, что здесь  $\hat{\gamma}$  выражается в некотором абсолютном и пока 2-х ортовом базисе  $\tilde{E}_m = \{\mathbf{p}(\tau), \dot{\mathbf{i}}(\tau)\}$  в  $\langle P^{1+1} \rangle^{(m)}$ . В таком базисе внутреннее ускорение  $\mathbf{g}(\tau)$  всегда имеет тангенциальный характер. Причём в нём  $\cos \varepsilon = \pm 1$  для ускоренного и замедленного движений в формуле (224А). Но если угловую скорость вращения касательной определить через дифференциал длины дуги  $d\tau$ , то тогда она будет тождественна гиперболической кривизне мировой линии (*физический смысл последней*).

\* \* \*

Далее рассмотрим более подробно, нежели в гл. 7А, ортопроекционное тригонометрическое представление абсолютных векторных характеристик движения второго порядка в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . Разложим абсолютные векторы кривизны и внутреннего ускорения на две относительные и ортогональные друг другу проекции – тангенциальную и нормальную по отношению к вектору скорости  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_a$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(ct) &= \frac{d\mathbf{i}(ct)}{dc\tau} = \frac{d\gamma_i^{(1)}}{dc\tau} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma_i \cdot \mathbf{e}_a \\ \operatorname{sh} \gamma_i \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} \operatorname{sh} \gamma_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_a}{dc\tau} \\ 0 \end{bmatrix}^{(1)} = \\ &= \bar{\bar{K}}^{(1)}(ct) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma_i \cdot \mathbf{e}_a \\ \operatorname{sh} \gamma_i \end{bmatrix}^{(1)} + \overset{\perp}{K}^{(1)} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n \\ 0 \end{bmatrix}^{(1)} = \bar{\bar{K}}^{(1)}(ct) \cdot \bar{\bar{\mathbf{p}}}^{(1)}(ct) + \overset{\perp}{K}^{(1)}(ct) \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}^{(1)}(ct) = \quad (226A) \\ &= \bar{\bar{K}}^{(1)}(ct) + \overset{\perp}{K}^{(1)}(ct) = K(ct) \cdot \mathbf{p}(ct) = K(ct) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\beta \\ \operatorname{sh} \gamma_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в таком представлении  $\lambda \geq 2$ . (То есть формально оно может применяться и для плоской кривой). Здесь

$$\bar{\bar{K}}^{(1)}(ct) = \frac{d\gamma_i^{(1)}}{dc\tau} \text{ и } \overset{\perp}{K}^{(1)}(ct) = \operatorname{sh} \gamma_i^{(1)} \cdot \frac{\|d\mathbf{e}_a\|^{(1)}}{dc\tau}$$

– тангенциальная и нормальная проекции гиперболической кривизны;

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}^{(1)}(ct) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma_i \cdot \mathbf{e}_a \\ \operatorname{sh} \gamma_i \end{bmatrix}^{(1)} \text{ – единичный 4-вектор тангенциальной кривизны,}$$

$$\overset{\perp}{\mathbf{p}}^{(1)}(ct) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n \\ 0 \end{bmatrix}^{(1)} \text{ – единичный 4-вектор нормальной кривизны,}$$

$$\mathbf{e}_n^{(1)} = \frac{d\mathbf{e}_a^{(1)}}{\|d\mathbf{e}_a\|^{(1)}} \text{ – единичный 3-вектор ортогонального приращения в } \tilde{E}_1,$$

который применялся ранее в (136А), (145А) и (161А). Из формулы (226А) непосредственно следует ряд соотношений.

Для 4-вектора кривизны имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} &= \bar{\bar{\mathbf{k}}} + \overset{\perp}{\mathbf{k}}, \\ K^2 &= \bar{\bar{K}}^2 + \overset{\perp}{K}^2. \end{aligned} \right\} \quad (227A)$$

Для трёх векторов и скаляров имеем:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{K} \cdot \operatorname{ch} \gamma_p) \cdot \mathbf{e}_\beta &= (\bar{\bar{\mathbf{K}}} \cdot \operatorname{ch} \gamma_e) \cdot \mathbf{e}_a + \overset{\perp}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{e}_n, \\ (\mathbf{K} \cdot \operatorname{ch} \gamma_p)^2 &= (\bar{\bar{\mathbf{K}}} \cdot \operatorname{ch} \gamma_e)^2 + (\overset{\perp}{\mathbf{K}})^2. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} K \cdot \sinh \gamma_p = \bar{\bar{K}} \cdot \sinh \gamma_i \rightarrow \sinh \gamma_p = \bar{\bar{K}}/K \cdot \sinh \gamma_i \leq \sinh \gamma_i \\ \{\gamma_i = \gamma_p \leq \frac{1}{\bar{K}} = 0 \leq \cos \varepsilon = \pm 1 (\mathbf{e}_\beta = \pm \mathbf{e}_\alpha)\}. \end{aligned} \quad (228A)$$

Последнее имеет место в мгновенном абсолютном базисе  $\hat{E}_m$  для произвольного движения и в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  для *простого* прямолинейного движения.

Напомним также основные соотношения для ортопроекций абсолютного движения в базисе  $\tilde{E}_1$  (из гл. 7А):

$$\begin{aligned} d\gamma = d\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta^{(m)} &= \bar{\bar{d}\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_\alpha^{(1)} + \frac{1}{d\gamma} \cdot \mathbf{e}_\eta^{(1)} \quad (d\gamma = d\gamma^{(1)} = d\gamma^{(m)}), \\ d^2\mathbf{x}^{(m)} = d^2\mathbf{x}^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\beta^{(m)} &= \bar{\bar{d}^2x}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_\alpha^{(1)} + \frac{1}{d^2x} \cdot \mathbf{e}_\eta^{(1)} - \text{см. формулу (161A)} \end{aligned}$$

(в этих соотношениях 3-вектор  $\mathbf{e}_\beta$  берётся здесь из 4-вектора  $\mathbf{p}$ );

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d^2x^{(m)}}{d\tau^2} = K = g/c^2 \rightarrow d^2x^{(m)} = d\gamma \cdot d\tau \quad (229A)$$

– при этом  $\frac{dx^{(m)}}{d\tau} = 0$ , но  $d\gamma = d \frac{dx^{(m)}}{d\tau}$  – см. формулу (80А);

$$(d\gamma)^2 = [\bar{\bar{d}\gamma}^{(1)}]^2 + [\frac{1}{d\gamma}^{(1)}]^2 - \text{см. формулу (145A);}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}(\tau) &= \bar{\bar{\mathbf{g}}}^{(1)}(\tau) + \frac{1}{\bar{\bar{d}\gamma}}^{(1)}(\tau), \\ g^2(\tau) &= \bar{\bar{g}}^2(\tau) + \frac{1}{\bar{\bar{d}\gamma}}^2(\tau). \end{aligned} \right\}$$

Векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{k}}}$  и  $\frac{1}{\bar{\bar{d}\gamma}}$  ( $\mathbf{g}$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{g}}}$  и  $\frac{1}{\bar{\bar{d}\gamma}}$ ) образуют прямоугольный треугольник в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^m$ . Их модули подчиняются теореме Пифагора, поэтому гипотенузы в них больше катетов. Данные ортогональные разложения кривизны и ускорения (зависящие от базиса) по отношению к вектору скорости  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_\alpha$  приводят к обеим их *релятивистским* проекциям (*отличие от принципа Герглотца* – см. гл. 2А и 4А).

Указанные векторы направлены по псевдонормалям  $\mathbf{p}$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{p}}}$  и  $\frac{1}{\bar{\bar{d}\gamma}}$  вдоль осей  $x^{(m)}$ ,  $\bar{\bar{x}}^{(m)}$  и  $\frac{1}{\bar{\bar{d}\gamma}}^{(1)}$  ( $\mathbf{p} \perp \mathbf{v}$ ). Ортопроекции ускоренного движения отображаются *локально* в двух координатных плоскостях.

Тангенциальная проекция описывается *локально* как гиперболическое движение в  $\langle \bar{\bar{\mathcal{P}}}^{1+1} \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathbf{v}, \bar{\bar{\mathbf{c}}t} \rangle$  радиуса  $\bar{\bar{R}} = c^2/\bar{\bar{g}}$ , то есть с ускорением  $\bar{\bar{g}} = \cos \varepsilon \cdot g$ . Его проекция на  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathbf{v}, \frac{1}{\bar{\bar{d}\gamma}} \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  как физическое движение в последнем есть прямая линия, направленная по вектору  $\mathbf{v}$ :

$$\bar{\bar{g}}^{(1)} = sch^3 \gamma \cdot \bar{\bar{g}} = c \cdot \frac{d\bar{\bar{\gamma}}}{dt} = \frac{d^2\bar{\bar{x}}^{(m)}}{d\tau^2} - \text{см. формулу (167A).}$$

Нормальная проекция описывается локально как начальное гиперболическое движение, или тождественное ему псевдокруговое движение в  $\langle \overset{\perp}{P}^{1+1} \rangle^{(1)} \equiv \langle \overset{\perp}{\mathbf{g}}, \overset{\rightarrow}{\mathbf{ct}} \rangle$  радиуса  $\overset{\perp}{R} = c^2/\overset{\perp}{g}$ , то есть с ускорением  $\overset{\perp}{g} = \sin \varepsilon \cdot g$ . Его проекция на то же  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(1)}$  как физическое движение в последнем есть окружность вещественного радиуса  $r$ . Причём

$$\overset{\perp}{g}^{(1)} = \operatorname{sch}^2 \gamma \cdot \overset{\perp}{g} = c \cdot \frac{d\overset{\perp}{\gamma}}{d\tau} = \frac{d^2 \overset{\perp}{x}^{(m)}}{d\tau^2} - \text{см. формулу (168A)}$$

(векторы  $\overset{\perp}{\mathbf{g}}$  и  $\overset{\perp}{g}^{(1)}$  коллинеарны, векторы  $\overset{\perp}{\mathbf{g}}$  и  $\mathbf{v}$  перпендикулярны),

$$r = v^2/\overset{\perp}{g}^{(1)} = ch^2 \gamma \cdot v^2/\overset{\perp}{g} = ch^2 \gamma \cdot v^2/c^2 \cdot \overset{\perp}{R} = sh^2 \gamma \cdot \overset{\perp}{R}.$$

Последняя формула связывает тригонометрическим образом радиусы нормальных гиперболической и сферической кривизн. В частности, при  $\gamma=0$  ( $v=0$ ) имеем:  $\overset{\perp}{R}/r=\infty$ ; при  $\gamma=\omega$  имеем:  $\overset{\perp}{R}=r$ ; при  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $v \rightarrow c$ ) имеем:  $R/r=0$  (то есть касательная  $\overset{\rightarrow}{i}(ct)$  стремится к изотропному конусу). Двумя маргинальными случаями являются приводимые ниже простые движения (относительно  $\tilde{E}_1$ ).

Простое тангенциальное ускоренное движение, где  $\bar{\bar{g}} \neq 0$ ,  $\overset{\perp}{g} = 0$  ( $\lambda = 2$ ):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{c}}{d\tau} \right]_{e_a = \text{const}} &= \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} = \frac{d^2 \overset{\rightarrow}{ct}}{d\tau^2} = c^2 \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dct} = \bar{\bar{g}}(\tau) \cdot \bar{\bar{\mathbf{p}}}(ct) = \bar{\bar{g}}(\tau) = \frac{d^2 \overset{\perp}{x}^{(m)}}{d\tau^2} \cdot \mathbf{p}(ct) = \\ &= c \cdot \frac{d\bar{\bar{\gamma}}}{d\tau} \cdot \bar{\bar{\mathbf{p}}}(ct) = \frac{c^2}{R} \cdot \bar{\bar{\mathbf{p}}}(ct), \end{aligned}$$

что тождественно по результату (80A). (В частности, при  $\frac{d\gamma^{(1)}}{dct} = \text{const}$  совершается интегрально гиперболическое движение, а его проекция на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  есть равноускоренное (замедленное) прямолинейное физическое движение.)

Простое нормально ускоренное движение, где  $\bar{\bar{g}} \neq 0$ ,  $\overset{\perp}{g} = 0$  ( $\lambda = 3$ ):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{c}}{d\tau} \right]_{\gamma = \text{const}} &= \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} = \frac{d^2 \overset{\rightarrow}{ct}}{d\tau^2} = c^2 \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dct} = \frac{1}{\overset{\perp}{g}} \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(ct) = \frac{1}{\overset{\perp}{g}}(\tau) = \frac{d^2 \overset{\perp}{x}^{(m)}}{d\tau^2} \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(ct) = \\ &= c \cdot \frac{d\overset{\perp}{\gamma}}{d\tau} \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(ct) = \frac{c^2}{R} \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(ct). \end{aligned}$$

(В частности, при  $\frac{\|d\mathbf{e}_a\|^{(1)}}{dct} = \text{const}$  совершается интегрально псевдовинтовое движение, а его проекция на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  есть равномерное планетарное физическое движение.)

Угловая скорость планетарного физического движения в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(1)}$  выражается в виде:

$$w = \frac{\|d\mathbf{e}_a\|}{dt} = \operatorname{sch} \gamma \cdot \frac{\|d\mathbf{e}_a\|}{d\tau} = \frac{\operatorname{sch} \gamma \cdot \frac{1}{g}}{\operatorname{sh} \gamma \cdot c} = \frac{\operatorname{sch} \gamma \cdot c}{\operatorname{sh} \gamma \cdot R} = \frac{\operatorname{th} \gamma \cdot c}{r} = \frac{v}{r},$$

то есть нерелятивистским образом;

$$\frac{1}{g} = v \cdot w = \operatorname{sch}^2 \gamma \cdot \frac{1}{g} \quad (\text{см. формулу (168A)}).$$

Для сравнения приведём аналогичное ортогональное разложение ускорения в  $\hat{E}_1$  в нерелятивистской механике, то есть в пространстве-времени Лагранжа ( $\lambda \geq 2$ ):

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_a \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \cdot \mathbf{e}_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \cdot \frac{d\mathbf{e}_a}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g} \cdot \mathbf{e}_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{g} \cdot \mathbf{e}_\eta \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \bar{g} = \frac{dv}{dt} = g \cdot \cos \varepsilon, \quad \frac{1}{g} = v \cdot \frac{\|d\mathbf{e}_a\|}{dt} = v \cdot w = v^2/r = g \cdot \sin \varepsilon;$$

$$g^2 = \bar{g}^2 + \frac{1}{g}^2, \quad \mathbf{g} = \bar{g} + \frac{1}{g} \quad (\bar{g} \parallel \mathbf{v}, \bar{g} \perp \mathbf{v}).$$

\* \* \*

Отметим, что псевдоаналог (223А) первой формулы Френе – Серре можно вывести тригонометрическим способом, используя как аргумент гиперболический угол движения при дифференцировании в базисе  $\hat{E}_m$  в соприкасающейся псевдоплоскости:

$$d\mathbf{i} = \mathbf{p} d\hat{\gamma} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{i}}{d\hat{\gamma}} = \mathbf{p} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{i}}{R d\hat{\gamma}} = \frac{d\mathbf{i}}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}}{R} = K \cdot \mathbf{p}. \quad (230A)$$

Соответственно для кривых в квазиевклидовом пространстве  $\langle Q^{n+1} \rangle$  (гл. 8А) в базисе  $\hat{E}_m$  в соприкасающейся квазиплоскости имеют место аналогичные тригонометрические соотношения:

$$d\mathbf{e} = \mathbf{n} d\hat{\phi} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{e}}{d\hat{\phi}} = \mathbf{n} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{e}}{R d\hat{\phi}} = \frac{d\mathbf{e}}{d\tau} = \frac{\mathbf{n}}{R} = K \cdot \mathbf{n}. \quad (231A)$$

Очевидно, что мировая линия, необъемлемая какой-либо псевдоплоскостью, имеет значение  $\lambda \geq 3$ . В таком случае отдельный её фрагмент или она в целом как регулярная кривая в каждой собственной точке  $M$  наряду с абсолютной гиперболической кривизной ( $K$  и  $\mathbf{k}$ ) имеет дополнительный параметр – *абсолютное сферическое кручение*, причём также в скалярной и векторной формах:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{t}(\tau) = T(\tau) \cdot \mathbf{b}(\tau), \\ \mathbf{t}' \cdot I^\oplus \cdot \mathbf{t} = T^2, \\ \mathbf{b}' \cdot I^\oplus \cdot \mathbf{b} = 1. \end{array} \right\} \quad (232A)$$

Кручение вызывает сферическую ротацию соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\tau), \mathbf{i}(\tau) \rangle$  вокруг мгновенной оси  $\hat{\mathbf{t}}(\tau)$ , или вокруг  $\mathbf{i}(\tau)$ . При этом псевдонормаль  $\mathbf{p}(\tau)$  претерпевает сферическую часть своей общей ротации (сферической и гиперболической). Сферическая часть ротации  $\mathbf{p}(\tau)$  как единичного вектора имеет кривизну  $T$  (радиус кривизны  $R_T = 1/T$ ) и направляющий орт  $\mathbf{b}$  – вектор бинормали. Поэтому кручение можно также определить как кривизну кривизны, или как *кривизну второго порядка*.

Для кривой порядка вложения  $\lambda = 3$  (например, псевдовинтовой линии) бинормаль находится в каждой точке  $M$  как единичное ортогональное дополнение к псевдонормали в собственной  $\langle E_T^{2+1} \rangle^{(m)}$ . Такая картина имеет место при криволинейном физическом движении в некоторой евклидовой плоскости, в том числе планетарного типа. В этом случае правая тройка векторов  $\{\mathbf{p}(\tau), \mathbf{b}(\tau), \mathbf{i}(\tau)\}$  задаёт *подвижный трёхгранник Френе* в  $\langle P^{2+1} \rangle \equiv \text{CONST}$ .

В самом же общем случае бинормаль и кручение вычисляются совместно в результате 3-го дифференцирования вдоль мировой линии после (222А) и (223А):

$$\frac{d\mathbf{p}(\tau)}{d\tau} = -K(\tau) \cdot \mathbf{i}(\tau) + T(\tau) \cdot \mathbf{b}(\tau). \quad (233A)$$

Бинормаль  $\mathbf{b}(\tau)$  сферически ортогональна  $\mathbf{p}(\tau)$  в мгновенной *абсолютной плоскости кручения псевдонормали*  $\langle E_T^{2+1} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\tau), \mathbf{b}(\tau) \rangle$ , но как 4-вектор она псевдоортогональна  $\mathbf{p}(\tau)$  и  $\mathbf{i}(\tau)$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В той же последовательности  $E_{(m)} = \{\mathbf{p}(\tau), \mathbf{b}(\tau), \mathbf{i}(\tau)\}$  они задают абсолютный и пока 3-х ортовый мгновенный псевдодекартов базис в  $\langle P^{2+1} \rangle^{(m)}$ . Последнее есть мгновенное *абсолютное соприкасающееся плоское трёхмерное подпространство-время*. Кручение  $T$  в окрестности данной точки  $M$  – положительная характеристика (для правого 3-х ортового базиса), если вид кривой мировой линии в нём напоминает правый винт, и обратно.

Производная (233А) выражается функционально как *псевдоаналог второй формулы Френе – Серре*. В силу единичности вектора  $\mathbf{p}(\tau)$ , его дифференцирование вдоль кривой, как и вектора  $\mathbf{i}(\tau)$  в (223А), сводится к некоторой ротации. Эта общая ротация в (233А) разложена на две псевдоортогональные друг другу составляющие: гиперболическую и сферическую.

Гиперболическая ротация  $\mathbf{p}(\sigma)$  происходит синхронно с  $\mathbf{i}(\sigma)$  в одной и той же соприкасающейся псевдоплоскости кривизны  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  вокруг мгновенной бинормали  $\mathbf{b}(\sigma)$  с отрицательной по отношению к (225А) гиперболической угловой скоростью  $\langle -\eta_K^{(m)} \rangle$ .

Сферическая ротация  $\mathbf{p}(\sigma)$  происходит в плоскости кручения  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$  вокруг мгновенной  $\mathbf{i}(\sigma)$  с абсолютной сферической угловой скоростью:

$$w_T^{(m)} = c \cdot T^{(m)} = c / R_T^{(m)} = g_T^{(m)} / c, \quad (234A)$$

где  $g_T^{(m)} = g_T(\sigma)$  – мгновенное *внутреннее ускорение кручения псевдонармали*. Как 4-вектор оно направлено по бинормали

$$\mathbf{g}_T(\sigma) = c^2 \cdot T^{(m)} \cdot \mathbf{b}^{(m)} = g_T(\sigma) \cdot \mathbf{b}^{(m)}. \quad (235A)$$

*Абсолютная полная кривизна для общей ротации псевдонармали*  $\mathbf{p}(\sigma)$  в векторной и скалярной формах определяются из (233А) как

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}(\sigma) &= [T(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma)] + [-K(\sigma)^{(m)} \mathbf{i}(\sigma)], \\ Q(\sigma) &= \sqrt{T^2(\sigma) - K^2(\sigma)} = 1 / R_Q^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (236A)$$

Она времениподобна при  $K > T$ , в том числе при  $T = 0$ , и пространствуподобна при  $T > K$ . Но как кривизна (см. выше)  $Q > 0$ . В зависимости от соотношения между  $T$  и  $K$  определяется либо гиперболическая, либо вырожденная, либо сферическая угловая скорость общей ротации псевдонармали:

$$w_Q^{(m)} = \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|_P}{d\tau} = c \cdot Q^{(m)} = c / R_Q^{(m)} = g_Q^{(m)} / c, \quad (237A)$$

где  $g_Q^{(m)} = g_Q(\sigma)$  – мгновенное *внутреннее ускорение общей ротации псевдонармали* (брutto-параметр). Как 4-вектор оно направлено по соответствующему суммарному вектору полной кривизны ротации псевдонармали  $\mathbf{q}(\sigma)$ . При  $T = K$  имеем:  $Q, w, g_Q = 0$  (эффект компенсации полной кривизны общей ротации псевдонармали вследствие её вырождения на изотропном конусе).

Отметим также, что в известной монографии Синга, посвящённой ОТО, псевдоаналог теории Френе – Серре почему-то утверждается в абсолютных ковариантных производных для *искривлённого* псевдориманова пространства-времени [42, с. 17–20]. В силу его неизотропности формулы – аналоги здесь не могут быть однозначными. Во второй формуле – аналоге (233А) допущена ошибка в знаке перед первой – гиперболической частью ротации псевдонармали. (Если переменить знак псевдонармали, то изменятся знаки и в других формулах.)

\* \* \*

При  $\lambda = 3$  имеет место псевдоаналог третьей формулы Френе – Сепре:

$$\frac{d\mathbf{b}(\tau)}{d\tau} = -T(\tau) \cdot \mathbf{p}(\tau) = -1/R_T^{(m)} \cdot \mathbf{p}(\tau). \quad (238A)$$

В этом случае при 4-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222А), (223А) и (233А) ротация бинормали осуществляется синхронно со сферической частью ротации псевдонормали – кручением. Обе эти синхронные ротации происходят в одной и той же мгновенной абсолютной плоскости кручения  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$ . Кроме того, в этом случае

$$\{\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)} \oslash \mathbf{b}^{(m)}\} \equiv \{\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \oslash \mathbf{i}^{(m)}\} \equiv \langle P^{2+1} \rangle_Q \equiv \text{CONST} \quad (239A)$$

есть плоское подпространство-время событий ( $\lambda = 3$ ). Такого рода абсолютное движение проецируется гиперболически на какую-либо евклидову плоскость  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle P^{2+1} \rangle_Q$  как криволинейное неравномерное физическое движение в ней (в общем случае).

Особый частный случай при  $\lambda = 3$  – псевдовинтовое движение вокруг некоторой (базовой) стрелы времени  $\vec{ct}$  в каком-нибудь  $\tilde{E}$ . Соответственно в проекции на базовое  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$  оно представляется как равномерное планетарное физическое движение. Оно характеризуется постоянством своих абсолютных параметров (в скалярной форме) и их определённой тригонометрической взаимосвязью. В базисе  $\tilde{E}$  псевдовинтовое движение реализуется тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\left. \begin{array}{l} K(\tau) = \text{const}, \\ T(\tau) = \text{const}, \\ \mathbf{p}(\tau) \perp \mathbf{i}(\tau). \end{array} \right\} \quad (240A)$$

Здесь к универсальному свойству *гиперболической* ортогональности векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{i}$  добавлено требование их *сферической* ортогональности в  $\langle P^{2+1} \rangle_Q$ . Следовательно, они образуют абсолютный универсальный 2-х ортовый базис. Общая ротация псевдонормали (236А) происходит в данном случае именно в базовом  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ . Поэтому она обязательно пространствуподобна. Наиболее просто и наглядно псевдовинтовое движение задаётся в цилиндрических координатах:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = r \cdot \cos \varphi, \\ x_2 = r \cdot \sin \varphi, \\ ct = a \cdot \varphi, \end{array} \right\} \quad (241A)$$

где  $r$  – вещественный радиус проекции винта на базовое  $\langle E^2 \rangle$ , или радиус планетарного физического движения;  
 $\varphi$  – параметрический угол сферической ротации в базовом  $\langle E^2 \rangle$ ;  
 $a$  – высота винта для единичного  $\varphi$ .

Данному псевдовинтовому движению отвечает характеристический *внутренний гиперболически прямогоугольный треугольник* (§ 6.4) с катетами  $r$  и  $a$  ( $a > r$ ). Он реализуется в двух вариантах (при значении  $\varphi = 1$  рад) – либо как плоский треугольник на централизованной секущей псевдоплоскости (содержащей  $\vec{ct}$ ), либо как треугольник на боковой цилиндрической поверхности, объемлющей винт. При этом у них общая высота-катет « $a$ », равное основание-катет « $r$ » и поэтому равная гипotenуза, определяемая псевдоевклидовой теоремой Пифагора:

$$\rho^2 = a^2 - r^2.$$

Исходные параметры « $a$ » и « $r$ » однозначно задают постоянный гиперболический угол движения

$$\gamma = \operatorname{Arsh} r/\rho \quad (\operatorname{sh} \gamma = r/\rho).$$

Осуществляя ортогональное дифференцирование (223А) и (233А) в указанных цилиндрических координатах, получаем формулы для кривизны и кручения, а также их тригонометрическую взаимосвязь:

$$\left. \begin{aligned} r/R_K &= r^2/(a^2 - r^2) = (r/\rho)^2 = \operatorname{sh}^2 \gamma, \\ a/R_T &= a^2/(a^2 - r^2) = (a/\rho)^2 = \operatorname{ch}^2 \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (242A)$$

С учётом того, что  $a = \operatorname{cth} \gamma \cdot r$ , отсюда вытекают соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r/R_T &= \operatorname{sh} \gamma \cdot \operatorname{ch} \gamma, \\ T = K \cdot \operatorname{cth} \gamma &\quad (T > K), \quad R_T = R_K \cdot \operatorname{th} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (243A)$$

Полная кривизна ротации псевдонормали как 4-вектор направлена параллельно базовому  $\langle E^2 \rangle$  и строго к оси винта  $\vec{ct}$ . Угловые скорости и внутренние ускорения выражаются в виде:

$$w_Q = \frac{\|\mathrm{d}\mathbf{p}\|_P}{dt} = c \cdot Q = c \cdot \sqrt{T^2 - K^2} = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \gamma}{r} = \frac{v^*}{r},$$

$$w_T = \frac{\|\mathrm{d}\mathbf{b}\|_P}{dt} = c \cdot T, \quad w_K = \frac{\|\mathrm{d}\mathbf{e}\|_P}{dt} = c \cdot K;$$

$$g = c^2/R_K = c^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma / r = v^{*2}/r = \frac{1}{g} \quad (\frac{1}{g} \perp \mathbf{v}, \bar{\bar{\mathbf{g}}} = \mathbf{0}),$$

$$g^{(1)} = g \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma = v^2/r = \frac{1}{g^{(1)}} \quad (\frac{1}{g^{(1)}} \parallel \frac{1}{g}).$$

В каждой точке  $M$  псевдовинта соприкасающаяся псевдоплоскость  $\langle P^{1+1} \rangle^{(m)} \equiv \langle p(\tau), i(\tau) \rangle$  рассекает объемлющий цилиндр по мгновенному касательному эллипсу. В его перигее (точке  $M$ ) радиусы касательных окружности и гиперболы совпадают. Следовательно, нормаль и псевдонормаль к псевдовинтовой мировой линии одинаковы ( $n = p$ ).

В подвижном трёхграннике Френе  $\langle p(\tau), b(\tau), i(\tau) \rangle$  4-вектор псевдонормали  $p(\tau)$ , как и  $k(\tau)$ , направлен перпендикулярно к базовой оси  $\vec{ct}$ ; 4-вектор бинормали  $b(\tau)$ , как и  $t(\tau)$ , направлен тангенциално к окружности радиуса  $r$  планетарного физического движения в базовом  $\langle E^2 \rangle$ , то есть вдоль вектора скорости  $v$ , но в противоположном ему направлении; 4-вектор единичной касательной  $i(\tau)$ , как и  $c(\tau)$ , направлен по мировой линии, то есть по  $\vec{ct}$ . В силу этого  $p(\tau)$  и  $i(\tau)$  совместно сферически и гиперболически ортогональны друг другу – см. формулу (240А).

Изложенная абсолютная трактовка, в принципе, обобщается для псевдовинтового движения, проекцией которого является обычное эллиптическое планетарное физическое движение.

\* \* \*

В самом же общем случае для мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ,  $\lambda = 4 = \max$ . Тогда бинормаль  $b(\tau)$  как единичный вектор подвергается общей сферической ротации в  $\langle E^3 \rangle^{(m)}$ , псевдоортогонально дополнительном к  $i(\tau)$ , но с двумя степенями свободы в силу её перманентной сферической ортогональности к псевдонормали. Формально вторая степень свободы вызвана ротацией плоскости кручения  $\langle E^2 \rangle_T^{(m)} \equiv \langle p(\tau), b(\tau) \rangle$  в  $\langle E^3 \rangle^{(m)}$ , или её *ортопрецессией*  $Z(\tau)$ . При 4-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222А), (223А) и (233А) общая сферическая ротация бинормали разлагается на две сферические составляющие, ортогональные друг другу. В результате имеем *третью формулу*:

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -T(\tau) \cdot p(\tau) + Z(\tau) \cdot h(\tau). \quad (244A)$$

Здесь первая часть сферической ротации бинормали синхронна со сферической частью общей ротации псевдонормали в формуле (233А). Обе ротации происходят в плоскости  $\langle E^2 \rangle_T^{(m)}$ . Вторая часть сферической ротации бинормали осуществляется в *мгновенной абсолютной плоскости ортопрецессии бинормали*  $\langle E^2 \rangle_Z^{(m)}$  вокруг мгновенной псевдонормали  $p(\tau)$ . (Как и ранее, здесь используется взаимная ортогональность единичного вектора-функции и его векторадифференциала любого порядка.) Единичный 4-вектор *тринормали*  $h(\tau)$  является однозначным (при  $\lambda = 4 = \max$ ) ортогональным дополнением в  $\langle E^3 \rangle^{(m)}$  к  $\langle E^2 \rangle_T^{(m)}$ .

Наиболее общо он определяется также однозначно как псевдортогональное дополнение в базовом псевдоевклидовом пространстве-времени  $\langle P^{3+1} \rangle$  к тройке единичных орт-векторов – псевдонаормали, бинормали и касательной:

$$\left. \begin{aligned} \{\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Z^{(m)} \oplus \mathbf{p}(\sigma) \} &\equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)} \equiv \{ \langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \oplus \mathbf{h}(\sigma) \}, \\ \{\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)} \oslash \mathbf{i}(\sigma) \} &\equiv \langle P^{3+1} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (245A)$$

Тринормаль  $\mathbf{h}(\sigma)$  в плоскости ортопрецессии бинормали  $\mathbf{b}(\sigma)$  перманентно сферически ортогональна ей. При заключительном 5-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222А), (223А), (233А) и (244А) имеем *четвёртую формулу*:

$$\frac{d\mathbf{h}(\sigma)}{d\sigma} = -Z(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) = -1/R_Z^{(m)} \cdot \mathbf{b}(\sigma). \quad (246A)$$

Это соотношение вытекает из очевидного условия, что формально последующий и *последний* в получаемой серии абсолютный дифференциально-геометрический параметр пятого порядка при  $\lambda = 4$  является обязательно нулевым (то есть их цепь обрывается). Она, конечно, также имеет свой вещественный аналог для регулярных кривых, вложенных в евклидово пространство  $\langle \mathcal{E}^4 \rangle$  или  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , и т. д.

В последовательности  $\hat{\mathbf{E}}_{(m)} = \{\mathbf{p}(\sigma), \mathbf{b}(\sigma), \mathbf{h}(\sigma), \mathbf{i}(\sigma)\}$  эти единичные векторы задают *полный абсолютный 4-х ортовый мгновенный псевдодекартов базис* в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Здесь они, по определению, составляют правую четвёрку базисных векторов, или *мгновенный псевдоортогональный репер*. (Ортопрецессия бинормали в окрестности точки М мировой линии совершается в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$  как для правого винта в абсолютном 3-х ортовом суббазисе  $\hat{\mathbf{E}}_{(m)}^{(3)} = \{\mathbf{p}(\sigma), \mathbf{b}(\sigma), \mathbf{h}(\sigma)\}$  при положительном значении величины  $Z$ .) В указанном случае правая четвёрка базисных векторов  $\{\mathbf{p}(\sigma), \mathbf{b}(\sigma), \mathbf{h}(\sigma), \mathbf{i}(\sigma)\}$  задаёт *характеристический подвижный четырёхгранник* в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .

Абсолютная мгновенная угловая скорость сферической ортопрецессии бинормали и вместе с тем сферической ротации тринормали в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Z^{(m)}$  выражается в виде:

$$w_Z^{(m)} = \frac{\|d\mathbf{h}\|_p}{d\sigma} = c \cdot Z^{(m)} = c/R_Z^{(m)} = g_Z^{(m)}/c, \quad (247A)$$

где  $g_Z^{(m)} = g_Z(\sigma)$  – мгновенное *внутреннее ускорение ортопрецессии бинормали и ротации тринормали*. Как 4-вектор оно направлено по мгновенному вектору тринормали:

$$g_Z(\sigma) = c^2 \cdot Z^{(m)} \cdot \mathbf{h}^{(m)} = g_Z(\sigma) \cdot \mathbf{h}^{(m)}. \quad (248A)$$

Абсолютная полная сферическая кривизна для общей сферической ротации бинормали  $\mathbf{b}(\text{ct})$  в векторной и скалярной формах определяется из (244А) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{l}(\text{ct}) &= [-T(\text{ct}) \cdot \mathbf{p}(\text{ct})] + [Z(\text{ct}) \cdot \mathbf{h}(\text{ct})], \\ L(\text{ct}) &= \sqrt{T^2(\text{ct}) + Z^2(\text{ct})} = 1/R_L^{(m)}; \end{aligned} \right\} \quad (249\text{A})$$

$$w_L^{(m)} = \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{b}\|_P}{dt} = c \cdot L^{(m)} = c/R_L^{(m)} = g_L^{(m)}/c. \quad (250\text{A})$$

Здесь  $g_L^{(m)} = g_L(\text{ct})$  – мгновенное внутреннее ускорение общей сферической ротации бинормали (брутто-параметр). Как 4-вектор оно направлено по соответствующему суммарному вектору полной кривизны ротации бинормали  $\mathbf{l}(\text{ct})$ .

В свою очередь, тринормаль  $\mathbf{h}(\text{ct})$ , согласно (246А), подвергается сферической ротации в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Z^{(m)}$  синхронно со второй частью сферической ротации бинормали. Эта часть ротации  $\mathbf{b}(\text{ct})$  как единичного вектора имеет сферическую кривизну  $Z$  (радиус кривизны  $R_Z = 1/Z$ ) и направляющий орт  $\mathbf{h}(\text{ct})$  – вектор тринормали. Поэтому ортопрецессию можно также определить как кривизну *третьего* порядка. В РТГ в базовом пространстве-времени Минковского это есть *максимальный порядок абсолютной кривизны мировой линии*. В ОТО в произвольном псевдоримановом пространстве-времени тот же порядок абсолютной кривизны мировой линии был бы не ограничен сверху в силу неопределенности размерности объемлющего его псевдевклидова пространства.

Таким образом, в данной заключительной главе, с применением средств тензорной тригонометрии, была изложена геометрическая трактовка абсолютного движения материальной точки под действием активных сил любой природы, в том числе гравитационных, как если бы оно происходило, согласно РТГ, в пространстве-времени Минковского и отображалось наблюдателем в каком-либо его универсальном базисе без искажения пространственно-временной гравитационной линзы, разделяющей материальную точку и данного наблюдателя. В частности, именно такое описание абсолютного движения должно иметь место в локальной окрестности этого пространства-времени, где проходит мировая линия указанной материальной точки.

## **Список литературы**

В данный список включены как цитируемые источники, так и литература учебного и информационного характера, содержащая необходимый фундаментальный материал. В ряде случаев для переводных изданий дополнительно указаны оригинальные первоисточники.

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979.
2. Архангельский А. В. Конечномерные векторные пространства. – М.: Физматгиз, 1982.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 2003.
5. Беллони Л., Рейна Ч. Прецессия Томаса. Подход Зоммерфельда: Пер. с англ. // Эйнштейновский сборник 1984 – 85. – М.: Наука, 1988, с. 201 – 214.  
В оригинале: Belloni L., Reina C. Sommerfeld's way to the Thomas precession // Europ. J. Phys. – 1986, v. 7, p. 55 – 61.
6. Блох П. В., Минаков А. А. Гравитационные линзы. – Киев: Наукова Думка, 1989.
7. Больяи Я. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида...: Пер. с лат. – М. - Л., 1950.  
В оригинале: Bolyai J. Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate ant falsitate Axiomatis XI Euclidei... – Maros-Vásárhely, 1832.
8. Боулер М. Гравитация и относительность: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.  
В оригинале: Bowler M. Gravitation and relativity. – Oxford - New York - Toronto - Sydney - Paris - Frankfurt: Pergamon Press, 1976.
9. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности: Пер. с франц. – М.: Мир, 1972.  
В оригинале: Brillouin L. Relativity reexamined. – New York - London: Acad. Press, 1970.
10. Булдырев В. С., Павлов Б. С. Линейная алгебра и функции многих переменных. – Л.: Издательство ЛГУ, 1985.
11. Вейль Г. Пространство - Время - Материя: Пер. с нем. – М.: Янус, 1996.

12. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964, с. 48 – 49.
13. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
15. Гаусс К. Отрывки из писем и черновые наброски, относящиеся к неевклидовой геометрии. Пер. с нем.// В сборнике: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1950.
16. Гилл Ф., Мюоррей У. Численные методы условной оптимизации: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977, с. 196 – 206.
17. Гильберт Д. Основания физики: Пер. с нем. // В сборнике: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979.  
В оригинале: Hilbert D. Die Grundlagen der Physik // Gessellschaft Wiss. Göttingen / Math.-phys. Klasse. – 1915, Heft 3, S. 395.
18. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения. // Гл. III. Точное вычисление обобщённых обратных матриц: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988, с. 124 – 147.
19. Дикке Р. Гравитация и Вселенная: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972.  
В оригинале: Dicke R. Gravitation and the Universe. – Philadelphia: Amer. Philosoph. Soc., 1970.
20. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1974.
21. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978.
22. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. Том1: Пер. с нем. – М.: Гостехиздат, 1956.  
В оригинале: Sommerfeld A. Atombau und Spectrallinien. – Braunschweig, 1931, Bd. 1, S. 707 – 711.
23. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984.
24. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: ГИТТЛ, 1955.
25. Клейн Ф. Неевклидова геометрия: Пер. с нем. – М.-Л.: ГОНТИ, 1936.  
В оригинале: Klein F. Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. – Berlin: Julius Springer, 1928.
26. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа): Пер. с нем. // В сборнике: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1950.
27. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. – М.: Наука, 1978.
28. Кострикин А. И. Введение в алгебру. //Часть 1. Основы алгебры./ Часть 2. Линейная алгебра.– М.: Физматлит, 2002.
29. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986.
30. Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982.

31. Лобачевский Н. И. О началах геометрии. – Казань: Казанский вестник, 1829 – 1830.
32. Логунов А. А. Лекции по теории относительности. – М.: Наука, 2002.
33. Логунов А. А. Теория гравитационного поля. – М.: Наука, 2001.
34. Лоренц Г. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света: Пер. с англ. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Lorentz H. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light // Amster. Proc., 1904, v. 6, p. 809. / 1904, v. 12, p. 986.
35. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. – М.: Наука, 1972.
36. Минковский Г. Пространство и время: Пер. с нем. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Minkowski H. Raum und Zeit // Phys. Ztschr. – 1909, Bd. 10, S. 104.
37. Паули В. Теория относительности: Пер. нем. – М.: Наука, 1983.
38. Постников М. М. Лекции по геометрии. // Семестр 1. Аналитическая геометрия. / Семестр 2. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1986.
39. Пуанкаре А. К динамике электрона: Пер. с франц. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Poincaré H. Sur la dynamique de l' electron // C. R. Acad. Sci., Paris – 1905, v. 140, p. 1504. / Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo – 1906, v. XXI, p. 129.
40. Розендорн Э. Р. Поверхности отрицательной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1989, т. 48, с. 98 – 195.
41. Сабитов И. Х. Об изометрических погружениях плоскости Лобачевского в  $E^4$ . // Сибирский математический журнал, 1989, т. 30, № 5, с. 179 – 186.
42. Синг Дж. Общая теория относительности: Пер. с англ. – М.: Издательство ИЛ, 1963.
43. Смородинский Я. А. Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна // Эйнштейновский сборник 1971. – М.: Наука, 1972, с. 272 – 301.
44. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР – 1965, т. 163, №3, с. 591 – 594.
45. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963, с. 312 – 313.
46. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1961.

47. Харди Г., Литлвуд Д., Полиа Г. Неравенства: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1948.  
В оригинале: Hardy G., Littlewood J., Pólya G. Inequalities. – London: Cambridge University, 1934.
48. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел: Пер. с нем. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper // Ann. der Phys. – 1905, Bd. 17, S. 891.
49. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности: Пер. с нем. // В сборнике: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979.  
В оригинале: Einstein A. Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie // Ann. der Phys. – 1916, Bd. 49, S. 769.
50. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969.
51. Born M. // Ann. der Phys. – 1909, Bd. 30, S. 1.
52. Decell H. An application of the Cayley – Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. – 1965, v. 7, p. 526 – 528.
53. Dicke R. Gravitation without a Principle of Equivalence // Rev. Mod. Physics – New York: Amer. Phys. Soc., 1957, v. 29, № 3, p. 363 – 376.
54. Grassmann H. Die lineale Ausdehnungslehre. – Leipzig, 1844.
55. Gillies A. On the classification of matrix generalized inverses // SIAM Rev. – 1970, v. 12, p. 573 – 576.
56. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme // Monatsch. Math. Phys. – 1931, Bd. 38, S. 173 – 198.
57. Herglotz G. // Ann. der Phys. – 1911, Bd. 36, S. 497.
58. Langevin P. // Scientia. – 1911, v. 10, p. 31.
59. Moore E. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. – 1920, № 26, p. 394 – 395.
60. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1955, v. 51, № 3, p. 406 – 413.
61. Souriau J.-M. Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices // C. R. Acad. Sci., Paris – 1948, v. 227, p. 1010 – 1011.
62. Sommerfeld A. Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie// Phys. Ztschr. – 1909, Bd. 10, S. 826 – 829.
63. Thomas L. // Nature. – 1926, v. 117, p. 514.
64. Thirring W. An Alternative Approach to the Theory of Gravitation // Ann. of Phys. – New York and London: Acad. Press, 1961, v. 16, p. 96 – 117.
65. Varićak V. Die Relativtheorie und die Lobatschefkijsche Geometrie // Phys. Ztschr. – 1910, Bd. 11, S. 93 – 96.
66. Whittaker E. A history of the theories of aether and electricity. // Vol. 2 The modern theories 1900 – 1926. – London: Nelson, 1953.

## Именной указатель

- Адамар (Hadamard J.) 6, 7, 56, 57, 67, 139, 219  
Александров П. С. 322  
Архангельский А. Б. 322
- Беккенбах (Beckenbach E.) 322  
Беклемишев Д. В. 322  
Беллман (Bellman R.) 322  
Беллони (Belloni L.) 322  
Бельтрами (Beltrami E.) 170, 173, 176, 177, 188, 239, 240, 242, 243, 257, 261, 291  
Бине (Binet J.) 54  
Блануша (Blanusa D.) 176  
Блох П. В. 322  
Больяи (Bolyai J.) 8, 170, 172, 174, 176, 201, 243, 249, 251, 257, 262, 291, 292, 303, 322  
Бонне (Bonnet O.) 188, 256  
Борн (Born M.) 226, 325  
Боулер (Bowler M.) 189, 288, 299, 322  
Бриллюэн (Brillouin L.) 189, 302, 322  
Булдырев В. С. 322
- Варинг (Waring E.) 16, 23, 33, 142  
Варичак (Varičak V.) 243, 325  
Вейль (Weil H.) 6, 70, 323  
Виет (Viete F.) 16, 17, 23, 39, 56  
Владимиров В. С. 323  
Вольф (Wolf J.) 323
- Галилей (Galilei G.) 184, 192, 194–196, 204
- Гамильтон (Hamilton W.) 6, 27, 28, 33, 39, 63  
Гантмахер Ф. Р. 323  
Гаусс (Gauss C.) 176, 188, 242, 243, 251, 256, 257, 278, 292, 302  
Гегель (Hegel G.) 304  
Гельмгольц (Helmholtz H.) 300  
Герглотц (Herglotz G.) 205, 216, 312, 325  
Гесце (Hesse L.) 20–22, 61, 66  
Гёдель (Gödel K.) 305, 325  
Гёльдер (Hölder L.) 19  
Гилл (Gill Ph.) 323  
Гиллис (Gillies A.) 325  
Гильберт (Hilbert D.) 176, 289, 292, 323  
Грам (Gram J.) 49, 55, 57, 136, 219  
Грассман (Grassmann H.) 6, 325  
Грегори (Gregory R.) 323  
Греффе (Geffe K.) 24
- Д’Аламбер (D’Alembert J.) 65, 66  
De Бродье (De Broglie L.) 301  
Дедекинд (Dedekind R.) 6, 70  
Декарт (Descartes R.) 7, 26  
Дикке (Dicke R.) 189, 303, 323, 325  
Диссел (Dessell H.) 51, 325  
Дирак (Dirac P.) 198  
Допплер (Doppler Ch.) 258, 296
- Евклид (Euclid) 5, 19, 23, 142, 172, 173, 175  
Ефимов Н. В. 323
- Жордан (Jordan C.) 6, 28, 36–38, 46

- Зольднер (Soldner J.) 228  
Зоммерфельд (Sommerfeld A.)  
188, 221, 226, 243, 247, 256, 323,  
325
- Ильин В. А. 323
- Кавендиш (Cavendish H.) 295  
Каган В. Ф. 323  
Кант (Kant E.) 304  
Кантор (Cantor G.) 6, 70  
Капелли (Capelli A.) 6, 55, 59, 68  
Клейн (Klein F.) 170–176, 178,  
188, 196, 243, 257, 258, 260, 261,  
263–265, 276, 279, 281, 323  
Коперник (Copernik N.) 288, 295  
Корн (Korn G., Korn T.) 323  
Кострикин А. И. 323  
Коши (Cauchy A.) 6, 7, 19, 54, 60,  
67, 135, 136, 138, 145, 151, 153  
Крамер (Cramer G.) 6, 53  
Кристоффель (Cristoffel E.)  
286–288, 290, 293  
Кришнамурти (Krishnamurthy E.)  
323  
Кронекер (Kronecker L.) 6, 55, 59,  
68  
Кулон (Coulomb Ch.) 288  
Курант (Courant R.) 60, 61  
Кэли (Cayley A.) 6, 27, 28, 33, 39,  
63, 170–172, 175
- Лагранж (Lagrange J.) 60, 61, 151,  
153, 184, 192–196, 222, 266, 314  
Ламберт (Lambert J.) 5, 170–173,  
175, 176, 178, 240, 243, 249, 256,  
276, 278, 281  
Ланжевен (Langevin P.) 234, 325  
Ланкастер (Lankaster P.) 324  
Лаплас (Laplace P.) 66, 289  
Леверье (Le Verrier U.) 6, 16, 23,  
27, 33, 142
- Литлвуд (Littlewood J.) 325  
Лобачевский Н. И. 8, 24, 170, 172,  
174, 176, 187, 201, 202, 242, 243,  
249, 251, 257, 262, 291, 292, 303,  
324
- Логунов А. А. 189, 288, 324  
Лоренц (Lorentz H.) 7, 8, 164, 166–  
168, 174, 175, 178–180, 182–185,  
195, 196, 198, 203, 204, 206, 209,  
210, 243, 282, 289, 306, 324
- Маклорен (Maclaurin C.) 14, 19, 95  
Максвелл (Maxwell J.) 195, 198  
Манин Ю. И. 323  
Манн (Mann Th.) 305  
Маркус (Marcus M.) 324  
Мах (Mach E.) 189, 282, 283, 285,  
288, 289, 293, 295, 303  
Менье (Meusnier J.) 242  
Минаков А. А. 322  
Миндинг Ф. Г. 176  
Минк (Minc H.) 324  
Минковский (Minkowski H.) 6,  
69, 159, 160, 163, 167, 169, 171,  
174, 176, 177, 179–185, 188,  
189, 195–197, 202, 203, 206, 211,  
212, 214, 221, 222, 225, 226,  
228, 230, 242–245, 249, 256–  
259, 262, 267, 273, 281, 282,  
285–289, 291, 293, 295, 299,  
301–306, 308, 320, 321, 324  
Муавр (Moivre A.) 5, 98, 118, 150,  
151  
Мур (Moore E.) 6, 9, 51, 61, 68, 325  
Мюррей (Murrey W.) 323
- Нётер (Noether A.) 290  
Николай Кузанский (Nicolaus  
Cusanus) 284  
Ньютона (Newton I.) 12, 17, 23,  
142, 225, 231, 232, 282–285, 288,  
293, 295, 297, 298, 301, 304

- Павлов Б. С. 322  
Паули (Pauli W.) 304, 324  
Пенроуз (Penrose R.) 6, 9, 51, 61,  
  68, 325  
Пифагор (Pythagoras) 56, 146,  
  204, 216, 253, 256, 257, 263, 264,  
  266, 267, 269, 277, 278, 312, 318  
Планк (Planck M.) 297, 300  
Позняк Э. Г. 323  
Полиа (Pólya G.) 325  
Постников М. М. 8, 324  
Птолемей (Πτολεμαῖος) 288  
Пуанкаре (Poincaré H.) 6, 8,  
  183–185, 195–198, 202, 203, 206,  
  221, 231, 243, 244, 249, 253, 257,  
  282, 284, 288, 302, 307, 324  
Пуассон (Poisson S.) 288  
Рейна (Reina C.) 322  
Риман (Riemann G.) 176, 275, 276,  
  280, 281, 286, 287, 290–293  
Риччи (Ricci-Curbastro G.) 286  
Розендорн Э. Р. 176, 323, 324  
Сабитов И. Х. 176, 324  
Саккери (Saccheri G.) 175  
Серре (Serre J.) 189, 305, 306, 310,  
  314–317  
Синг (Synge J.) 316  
Сильвестр (Silvester J.) 6, 26, 35,  
  328  
Смородинский Я. А. 324  
Снеллиус (Snellius W.) 298  
Сурье (Souriau J.-M.) 6, 27, 28, 30,  
  33, 34, 39, 51, 325  
Тауринус (Taurinus F.) 5, 176, 243,  
  281  
Тирринг (Thirring W.) 189, 325  
Тихонов А. Н. 6, 60, 324  
Томас (Thomas L.) 188, 247, 256,  
  271, 325  
Уиттекер (Whittaker E.) 325  
Уоллингфорд (Wallingford R.) 5  
Фаддеев Д. К. 6, 15, 27, 30, 33,  
  39, 51, 324  
Фаддеева В. Н. 324  
Фитцджеральд (Fitzgerald G.) 217  
Фойгт (Voigt V.) 195, 210  
Фок В. А. 299, 324  
Френе (Frenet J.) 189, 305, 306,  
  310, 314–317, 319, 320  
Фробениус (Frobenius F.) 6, 7, 12,  
  19, 51, 142, 144, 146  
Харди (Hardy G.) 325  
Циolkовский К. Э. 188, 234  
Чайковский П. И. 5  
Швейкарт (Schweikart F.) 243  
Шмидт (Schmidt E.) 49, 57  
Шредингер (Schrödinger E.) 198  
Штурм (Sturm J.-Ch.) 23, 25, 26  
Эйлер (Euler L.) 5, 65, 66, 98, 118  
Эйнштейн (Einstein A.) 8, 184,  
  185, 188, 196, 197, 202, 207, 218,  
  221, 249, 251, 253, 254, 270, 282,  
  283, 287–290, 294, 296–300, 304,  
  325  
Эрмит (Hermite Ch.) 6, 62–64, 67,  
  68, 151–153  
Этвёш (Eötvös L.) 283  
Яглом И.М. 325  
Якоби (Jacobi K.) 61, 66, 292

## **Предметный указатель<sup>(\*)</sup>**

### *Основная часть монографии*

- Аннулирующий минимальный многочлен 34  
Антикоммутативность 126
- Базисы координатные**  
квазидекартовы 116  
псевдодекартовы 117  
тригонометрический 85, 109  
универсальный 117
- Внешние геометрии постоянной кривизны**  
гиперболические 116  
сферическая 91
- Генеральные неравенства  
косинусное 131, 133  
общее 145, 146  
синусное 138  
средних величин 18
- Гипербoloиды I и II Минковского 169  
Гиперсфераид 91
- Деформация (бинарная)  
гиперболическая 110  
сферическая 99  
элементарная 122, 123
- Дианаль 59
- Жорданова форма** 36–38
- Квазиевклидово пространство** 116  
**Квазиобратная матрица**  
аффинная 43  
гиперболическая (ортогональная) 117  
сферическая (ортогональная) Мура–Пенроуза 51
- Коммутативность 124  
Комплексификация 62  
адекватная 65, 150  
эрмитова 67, 151
- Косинусное отношение 59
- Линеоры 70, 147
- Матрицы сингулярные**  
нуль-дефектные 37  
нуль-нормальные 48  
нуль-простые 36
- Минорант 54
- Монобинарная форма**  
простой матрицы 63, 87  
тензорных тригонометрических функций 84, 85
- Моторные тензорные углы и функции 88, 94
- Нормы матриц (квадратичные)  
генеральные 141–143  
общие 145, 146  
порядка 1 Фробениуса 142, 143
- Параметры сингулярности**  
ранг 15  
1-й рок 17  
2-й рок 33
- Планары 70
- Предельный метод вычисления условного экстремума 61
- Принцип бинарности 87  
Принцип монарности 87
- Проективные модели Клейна  
вне абсолюта (котангенсная) 172  
внутри абсолюта (тangenсная) 170

<sup>(\*)</sup> Для удобства пользования указатель разбит на две части.

- Проективные тензорные углы и функции 72, 77  
 Проекторы собственные аффинные 42  
     гиперболические (ортого) 118  
     сферические (ортого) 48, 50  
 Псевдоевклидово пространство 117  
 Рефлекторы собственные аффинные 78  
     гиперболические 110  
     срединный 89, 115  
     сферические 74  
 Ротация  
     гиперболическая 110  
     ортосферическая 91, 115, 116  
     сферическая 88  
     элементарная 105, 123  
**Синусное отношение** 58  
 Специальный принцип относительности  
     математический 183  
     физический 183, 184  
 Средние величины  
     алгебраические 17  
     арифметическое 17  
     геометрическое 18  
     реверсивные формы 18  
     степенные 17  
 Суммирование движений  
     полярное представление 161  
     правило суммирования 166  
 Сферическо-гиперболическая аналогия  
     абстрактная 109  
     конкретная 112  
 Тензорная тригонометрия (плоская) евклидова 89  
     квазиеуклидова 91  
     псевдоевклидова 116  
 Тригонометрический спектр  
     нуль-простой матрицы 129  
     мультиплективной 130  
**Уравнение алгебраическое (вековое)**  
 16, 23  
     с положительными корнями 23  
     пределный глобальный метод решения 24  
     признаки положительности корней 26, 27  
**Фундаментальный метрический тензор псевдоевклидова пространства** 156  
**Фундаментальный рефлектор-тензор бинарного пространства** 116, 155  
     неориентированного 157  
     ориентированного 156  
**Характеристические коэффициенты**  
     матричные 1-го и 2-го рода 16, 28  
     структура 31, 32  
     редуцированные формы 39, 40  
     скалярные 16

## Приложение

- Аберрация 254, 258  
**Геометрии постоянной кривизны**  
     гиперболические 244  
         геометрия Бельтрами (гиперболоида I) 242  
         геометрия Лобачевского—Больяни (гиперболоида II) 243  
     сферическая (гиперсфера) 273  
     эллиптическая Римана 275, 280  
 Гиперболическая кривизна 228  
 Гиперболическое движение 228

- Деформированные координаты в РТГ 294  
**Закон равенства инерционной и гравитационной масс** 283  
**Закон сохранения энергии-импульса** 271, 289, 290  
**Инфинитиземальная теорема Пифагора**  
     на гиперболоидах I и II 257  
     на гиперсфере 278

- Квазиевклидово пространство индекса 1** 273  
  бинарное комплексное 195  
  сжатое 240  
  специальное в СТО 229, 236
- Лоренцево сокращение протяжённости** 217  
  линеорных объектов 214
- Мировая линия** 306
- Общерелятивистские эффекты (элементарная трактовка)** 295
- Общие законы суммирования движений (скоростей)**  
  гиперболических 262  
  сферических 280
- ОТО (общая теория относительности)** 287–290
- Прецессия Томаса** 247, 256, 271
- Принцип Маха** 282
- Принцип относительности**  
  Галилея 190  
  общий в ОТО 287  
  общий в РТГ 302  
  Пуанкаре 195, 206
- Принцип эквивалентности** 287
- Пространство-время Лагранжа** 192
- Псевдоаналог теории Френе – Серре**  
  1-я формула 310  
  2-я формула 315  
  3-я формула 319  
  4-я формула 320  
  подвижный четырёхгранник 320
- Псевдовинтовое движение** 313, 317
- Псевдоевклидово пространство индекса 1 (пространство-время)**  
  Минковского 196, 286, 300
- Псевдориманово пространство индекса 1 (пространство-время)** 292  
  Эйнштейна 287  
  эффективное в РТГ 294
- Псевдоскорость (4-скорость)** 307
- Релятивистский дуализм** 285
- РТГ (релятивистская теория гравитации)** 288, 294, 299
- Скорость физического движения**  
  координатная 201  
  собственная 224
- Собственное время** 207
- Собственное евклидово подпространство** 228
- СТО (специальная теория относительности)** 282
- Суммирование движений**  
  интегральных 227, 267  
  коллинеарных 221  
  неколлинеарных 245, 273
- Суммирование двух движений**  
  гиперболических 246, 249, 264  
  сферических 275, 276
- Сферический угол параллельности Лобачевского** 202
- Тензор сферической ротации (движения)** 274
- Тензор энергии-импульса** 233
- Тензорные тригонометрические модели кинематики движения**  
  абсолютного 306–310, 315–321  
  коллинеарного 221–226  
  относительного 269–272, 311–314  
  простого 237, 313
- Тензоры гиперболических преобразований**  
  деформации 206, 233  
  ротации (движения) 206, 232
- Теорема о приведении суммы однодименных движений к биортогональной форме** 253, 276
- Трактруса** 240  
  гиперболическое уравнение 241
- Ускорение физического движения**  
  внутреннее 225, 267  
  координатное 226, 269  
  собственное 226
- Формулы для элементарной ортосферической ротации (буста)**  
  косинусная 255  
  синусная (ортого) 255  
  тензорная 246, 275
- Эффект Допплера** 258

# **Оглавление**

<b>К читателям .....</b>	<b>3</b>
<b>Resume .....</b>	<b>4</b>
<b>Предисловие .....</b>	<b>5</b>
<b>Используемые обозначения .....</b>	<b>9</b>
<b>Раздел I. Ряд общих вопросов теории точных матриц.....</b>	<b>14</b>
<b>Глава 1. Коэффициенты характеристических многочленов</b>	
§ 1.1. Совместное определение скалярных и матричных коэффициентов.....	15
§ 1.2. Генеральное неравенство средних величин.....	17
§ 1.3. Предельный метод решения векового уравнения с вещественными корнями.....	23
§ 1.4. Структура и свойства скалярных и матричных коэффициентов.....	27
§ 1.5. Минимальный аннулирующий многочлен от матрицы.....	33
§ 1.6. Нуль-простые и нуль-дефектные сингулярные матрицы.....	36
§ 1.7. Характеристические коэффициенты в редуцированной форме.....	38
<b>Глава 2. Собственные аффинные и ортогональные проекторы</b>	
§ 2.1. Аффинные проекторы и квазиобратная матрица во взаимосвязи с коэффициентами высшего порядка.....	42
§ 2.2. Применение результатов в спектральном представлении матрицы .....	44
§ 2.3. Приведение нуль-простой матрицы к нуль-клеточной форме	47
§ 2.4. Нуль-нормальные сингулярные матрицы.....	48
§ 2.5. Сферически ортогональные проекторы и квазиобратная матрица.....	50
<b>Глава 3. Основные скалярные инварианты сингулярных матриц</b>	
§ 3.1. Минорант матрицы и его применение.....	54
§ 3.2. Синусные характеристики матриц.....	57
§ 3.3. Косинусные характеристики матриц.....	59
§ 3.4. Предельные методы вычисления проекторов и квазиобратных матриц.....	60

**Глава 4. Два альтернативных варианта комплексификации**

§ 4.1. Сопоставление основных вариантов.....	62
§ 4.2. Примеры адекватной комплексификации .....	65
§ 4.3. Примеры эрмитовой комплексификации .....	67

**Раздел II. Фундаментальное содержание тензорной тригонометрии.....** 69**Глава 5. Тензорная евклидова и квазиеуклидова тригонометрия**

§ 5.1. Объекты тензорной тригонометрии и их пространственные взаимоотношения.....	70
§ 5.2. Проективные тензорные синус, косинус и сферически ортогональные рефлекторы.....	72
§ 5.3. Проективные тензорные секанс, тангенс и аффинные рефлекторы.....	77
§ 5.4. Сопоставление двух способов задания тензорных углов – через прямоугольные и через сингулярные квадратные матрицы.....	79
§ 5.5. Канонические монобинарные клеточные формы сферических тензорных тригонометрических функций и рефлекторов.....	82
§ 5.6. Ротационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа.....	87
§ 5.7. Тригонометрическая теория простых корней $\sqrt{I}$ .....	92
§ 5.8. Моторные тензорные синус, косинус, секанс и тангенс.....	94
§ 5.9. Взаимосвязь между проективными и моторными тригонометрическими функциями и углами.....	96
§ 5.10. Деформационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа.....	98
§ 5.11. Специальные модальные преобразования собственных ортогональных и косоугольных проекторов и рефлекторов	102
§ 5.12. Элементарные тензорные сферические тригонометрические функции.....	105

**Глава 6. Тензорная псевдоевклидова тригонометрия**

§ 6.1. Гиперболические тензорные тригонометрические функции и рефлекторы.....	109
§ 6.2. Сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа...	111
§ 6.3. Фундаментальный рефлектор-тензор в квазиеуклидовой и псевдоевклидовой интерпретации.....	116
§ 6.4. Скалярная тригонометрия на псевдоплоскости.....	119
§ 6.5. Элементарные тензорные гиперболические тригонометрические функции.....	122

**Глава 7. Тригонометрическая природа коммутативности и антисимметрии**

§ 7.1. Коммутативность простых матриц.....	124
§ 7.2. Антисимметричность пары простых матриц.....	125

**Глава 8. Тригонометрические спектры и неравенства**

§ 8.1. Тригонометрический спектр нуль-простой матрицы.....	129
§ 8.2. Генеральное косинусное неравенство.....	131
§ 8.3. Спектрально-клеточное представление тензорных тригонометрических функций.....	134
§ 8.4. Генеральное синусное неравенство.....	135

**Глава 9. Геометрические нормы матричных объектов**

§ 9.1. Квадратичные нормы матричных объектов евклидова (квазиеуклидова) пространства.....	140
§ 9.2. Определение абсолютных и относительных геометрических норм.....	144
§ 9.3. Геометрический смысл общих квадратичных норм.....	145
§ 9.4. Линеоры специальных видов и простейшие линеорные фигуры.....	147

**Глава 10. Варианты комплексификации тензорной тригонометрии**

§ 10.1. Адекватный вариант.....	150
§ 10.2. Эрмитов вариант.....	151
§ 10.3. Псевдоизоморфия в бинарных комплексных пространствах....	153

**Глава 11. Тригонометрия общих псевдоевклидовых пространств**

§ 11.1. Овеществление бинарного евклидова пространства.....	155
§ 11.2. Группа псевдоевклидовых ротаций.....	156
§ 11.3. Полярное представление псевдоевклидовых ротаций.....	159
§ 11.4. Многоступенчатые гиперболические ротации.....	165

**Глава 12. Тригонометрия псевдоевклидова пространства Минковского**

§ 12.1. Проективные тригонометрические модели сопутствующих гиперболических геометрий.....	169
§ 12.2. Ротации и деформации в псевдоевклидовом пространстве Минковского.....	179
§ 12.3. Специальный математический принцип относительности	183

<b>Приложение. Тригонометрические модели движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности</b>	
Введение.....	187
Дополнительные обозначения.....	190
Глава 1А. Пространство-время Лагранжа и пространство времени Минковского как математические абстракции и физическая реальность.....	192
Глава 2А. Тензорная тригонометрическая модель однородных преобразований Лоренца.....	203
Глава 3А. Эйнштейново замедление времени как следствие ротационного гиперболического преобразования.....	207
Глава 4А. Лоренцево сокращение протяжённости как следствие деформационного гиперболического преобразования.....	212
Глава 5А. Тригонометрические модели коллинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии.....	221
Глава 6А. Изоморфное отображение псевдоевклидова пространства в квазиевклидово и в сжатое квазиевклидово пространства.....	238
Глава 7А. Тригонометрические модели неколлинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии.....	245
Глава 8А. Тригонометрические модели движений в сферической геометрии.....	273
Глава 9А. Необходимо ли искривление пространства-времени в поле тяготения?.....	282
Глава 10А. Природа движения по мировым линиям в пространстве-времени Минковского и его внутренняя геометрия.....	306
Список литературы.....	322
Именной указатель.....	326
Предметный указатель.....	329

*Научное издание*

Анатолий Сергеевич Нинул

**ТЕНЗОРНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ**  
*Теория и приложения*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Художник *М. М. Иванов*

Корректор *А. С. Попов*

Оригинал-макет подготовил *Е. А. Игошин*

Подписано к печати 13.09.2004 г. Формат 60 x 90<sup>1/16</sup>.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 10,5 бум. л.

Усл. печ. л. 21. Изд. № 1/10114. Тираж 1000 экз.

Издательство “Мир”  
Министерства культуры  
и средств массовых коммуникаций РФ  
107996, ГСП-6, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Internet: [www.mir-publishers.net](http://www.mir-publishers.net)

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ГУП “Брянское областное полиграфическое объединение”  
241019, г. Брянск, пр-т Ст. Димитрова, 40.